

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ИНТЕНСИВНОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ СТРУИ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

© 2022 г. *С.Н. Гурбатов¹, И.Ю. Демин¹, А.А. Лисин¹,
С.А. Карabasов^{1,2}, А.В. Тюрина³*

¹Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

²Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского

³МГУ им. М.В. Ломоносова

gurbatov.sergey@gmail.com, demin@rf.unn.ru, lisin.artem.a@gmail.com,
s.karabasov@qmul.ac.uk, vanilch22@gmail.com

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ, проект 19-12-00256.

DOI: 10.20948/mm-2022-07-03

Рассмотрены условия истечения недорасширенной сверхзвуковой струи из эксперимента LTRAC (Laboratory for Turbulent Research in Aerospace and Combustion, университет Monash, Австралия). Проведен анализ характерных параметров линейного и нелинейного переноса для струи LTRAC с использованием решений LES из ближнего и дальнего акустического поля. В обоих случаях показано выполнение условий линейного сценария переноса звука на расстояния, характерные для акустического эксперимента LTRAC. Для верификации теоретических оценок также получены численные решения сферического уравнения Бюргерса, используя начальные данные из расчета LES. Эволюционное уравнение Бюргерса решается численно в частотной области в дальней зоне до тех пор, пока эффект линейной диссипации не станет преобладающим. Решение выполняется с учетом и без учета нелинейного акустического члена, что важно для оценки влияния нелинейности на спектры аэродинамического шума в дальней зоне.

Ключевые слова: аэроакустика, уравнение Бюргерса, LTRAC, сверхзвуковая струя, численное моделирование

NUMERICAL SIMULATION OF THE EVOLUTION OF AN INTENSE AERODYNAMIC JET IN THE FAR-FIELD PROPAGATION

S.N. Gurbatov¹, I.Yu. Demin¹, A.A. Lisin¹, S.A. Karabasov^{1,2}, A.V. Tyurina³

¹ National Research Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky

² Central Aerohydrodynamic Institute after Prof. N.E. Zhukovsky

³ Lomonosov Moscow State University

The conditions for the outflow of an underexpanded supersonic jet from the LTRAC experiment (Laboratory for Turbulent Research in Aerospace and Combustion, Monash University, Australia) are considered. The analysis of the characteristic parameters of linear and nonlinear transport for the LTRAC jet is carried out using LES solutions from the near and far acoustic fields. In both cases, the fulfillment of the conditions of the linear scenario of sound transfer over distances characteristic of the LTRAC acoustic experiment is shown. To verify the theoretical estimates, numerical solutions of the spherical Burgers equation were also obtained using the initial data from the LES calculation. Solutions were obtained without and in the presence of a term in the Burgers equation corresponding to quadratic nonlinearity. The solutions responded to sound transfer at distances that were orders of magnitude greater than the distance between the acoustic microphone and the jet in the LTRAC experiment.

Key words: numerical analysis, aeroacoustics, Burgers equation, LTRAC, supersonic jet.

1. Введение

Одним из важнейших направлений нелинейной акустики является исследование акустических шумов самолетов: их прогнозирование при взлете и в процессе эксплуатации являются важнейшей проблемой развития авиации. Аэродинамический шум излучается обычно в широкой полосе частот и обуславливается, например, неравномерностью и турбулентностью потока воздуха, когда давление на выходе из сопла самолета не равно давлению окружающей среды. Это несоответствие давлений преодолевается струей, проходящей через области расширений и сжатий, представляющих собой квазипериодические ударные ячейки, взаимодействующие с турбулентными вихрями, исходящими из края сопла. Эти источники шума видны на спектрах дальнего поля как множественные пики, находящиеся вблизи ударных ячеек. Для акустических волн достаточно высокой амплитуды крутизна фронта акустической волны может играть значительную роль в изменении спектра шума достаточно далеко от источника, прежде чем механизм нелинейной диссипации станет доминирующим.

Еще с первых полетов реактивного лайнера Concorde [1] была отмечена важность нелинейных эффектов для распространения струйного шума высокой интенсивности. Проведенные измерения шума реактивного двигателя на полной мощности показали, что нелинейные искажения акустических спектров оказывают значительное влияние на шумовое поле, и было обнаружено аномальное усиление высокочастотной части спектра шума по сравнению с линейным предсказанием.

Однако эффект нелинейного распространения – не единственный возможный механизм образования ударных фронтов акустических волн [2]. В частности, для струй лабораторного масштаба [3] эффекты нелинейного распространения могут быть важны только в ближнем поле струи, в то время как влияние нелинейности на распространение дальнего поля незначительно. Например, другой механизм, ответственный за образование ударных акустических волн в дальней зоне, включает взаимодействие скачка уплотнения с турбулентными сдвиговыми слоями, волновые структуры которых линейно передаются в дальней зоне [4]. Нелинейное распространение волн конкурирует с линейными эффектами атмосферного поглощения. Взаимодействие между нелинейными и линейными эффектами диссипации выражается через обратное акустическое число Рейнольдса (число Гольдберга), которое не только сильно зависит от условий потока, таких как соотношение давления и температуры в сопле, но и от эффективного расстояния до струи.

Чтобы количественно оценить важность эффектов нелинейного распространения для шума сверхзвуковой струи, в нескольких исследованиях сравнивалось решение линейной и нелинейной моделей распространения звука для одних и тех же начальных условий. Существующие в литературе модели можно разбить на две категории. В первую категорию входят теоретические модели, использующие полуаналитические решения одномерного уравнения Бюргера и уравнений Навье-Стокса [5,6]. Эти модели вычислительно эффективны, но не могут учесть влияние турбулентности с высоким числом Рейнольдса и распределенный характер источников шума сверхзвуковой струи. По сравнению с ними, вторая категория моделей включает полностью вычислительные исследования, которые включают в себя трехмерные эффекты Навье-Стокса, расширяя область моделирования до дальнего поля и комбинируя решение Навье-Стокса с решением Эйлера вдали от струи [7]. Однако из-за вычислительных затрат в этих последних моделях обычно используются идеализированные условия сопла, например, струйный поток, выходящий из цилиндрической трубы без поджатия.

Несмотря на применение методов высокого разрешения, такие исследования обычно показывают ограниченное сравнение с экспериментальными данными, особенно в ближней зоне реактивного шума. Кроме того, диапазон расстояний распространения шума в дальней зоне, рассматриваемый с помощью таких методов, ограничивается несколькими сотнями начальных диаметров струи, что может быть недостаточно для полного описания нелинейно-линейных режимов распространения, включая область линейной диссипации.

В настоящей работе рассмотрено моделирование аэродинамического шума в дальней зоне, создаваемого холодным сверхзвуковым потоком недорасширенной струи в соответствии с условиями проточного эксперимента, проводимого в Laboratory for Turbulence Research in Aerospace and Combustion (LTRAC) Supersonic Jet Facility at Monash University [8]. Конкретные условия струи соответствуют случаю самой быстрой струи LTRAC, когда струя выходит из сопла с высокой долей площадей при соотношении давления сопла 4.2 с образованием заметных ударных ячеек и диска Маха из-за несоответствия между давлением на выходе сопла и окружающим давлением. Взаимодействие ударных ячеек с турбулентностью в слое сдвига приводит к интенсивному ударно-волновому шуму (BBSAN), который типичен для характерных пиков в акустических спектрах дальнего поля для углов наблюдения сбоку. Пики в первую очередь связаны с областями взаимодействия этих ударных ячеек с турбулентными вихрями в сдвиговых слоях. Для моделирования распространения BBSAN струи LTRAC в дальней зоне была реализована трехуровневая модель с использованием подхода декомпозиции области. В области нелинейного струйного течения уравнения Навье-Стокса решаются в рамках подхода Monotonically Integrated LES, начиная с выхода из сопла, где условия задаются из набора данных LTRAC Particle Image Velocimetry (PIV). Результаты LES проверяются по сравнению с данными PIV. На втором этапе решение LES комбинируется с пронизаемой формулировкой метода Ffowcs Williams-Hawkings (FW-H) [9, 10] для получения решений спектров шума в акустическом ближнем поле для нескольких углов наблюдателя, представляющих наибольший интерес с точки зрения BBSAN.

Затем предложенные трехуровневые модели акустических спектров ближнего поля используются для генерации реализаций начального акустического шума для численного решения сферического обобщенного уравнения Бюргерса [2,11]. Уравнение Бюргерса решается численными методами с помощью перехода в частотную область, где нелинейное уравнение в частных производных для поля превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение для его фурье-образа, которое аппроксимируется явной схемой первого порядка и решается в дальней зоне звукопереноса до достижения расстояний, где эффект линейной диссипации не станет преобладающим. Для оценки влияния нелинейности на спектры шума в дальней зоне проводится сравнение решений с учетом и без учета нелинейного члена в уравнении Бюргерса.

2. Численное моделирование решения эволюционного уравнения Бюргера

Рассмотрим эволюционное уравнение Бюргера, описывающее распространение нелинейных сферических волн в вязких средах без дисперсии [11,12]

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} - \frac{\beta}{c^2} V \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{b}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $V(r,t)$ – скорость акустической волны, c – скорость звука в свободном пространстве, ρ – плотность среды, b – кинематический коэффициент вязкости, r – расстояние от источника волны, β – нелинейный параметр среды (для воздуха примерно 0.5).

С помощью замены переменных уравнение (1) можно свести к безразмерному уравнению Бюргера для сферических волн

$$\frac{\partial U}{\partial R} - U \frac{\partial U}{\partial \tau} = \varepsilon g(R) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (2)$$

где безразмерные величины задаются в следующем виде:

$$U = \frac{r}{r_0} \frac{V}{V_0},$$

$$\tau = \omega_0 t, \quad x = (r - r_0) / r_{nl}, \quad R_0 = r_0 / r_{nl}, \quad R = R_0 \ln((R_0 + x) / R_0), \quad (3)$$

$$r_{nl} = \frac{c^2}{\beta \omega_0 V_0}, \quad r_l = \frac{2c^3 \rho}{b \omega_0}, \quad g(R) = \exp(R / R_0).$$

При получении уравнения (2) и выражений (3) было сделано предположение, что начальное возмущение скорости $V_0(t) = V(t, r=r_0)$ характеризуется некоторой типичной амплитудой V_0 и частотой ω_0 .

В формулах (3) приведены два важных параметра – характерное расстояние образования разрывов (ударных фронтов) в акустической волне r_{nl} и характерное расстояние r_l , на котором становится важным эффект вязкой диссипации. Отношение этих расстояний определяет обратное акустическое число Рейнольдса $Re_a^{-1} = \varepsilon = r_{nl} / r_{lin}$ (или число Гольдберга ε). Число R_0 задается как отношение внутреннего радиуса источника сферической волны к характерному нелинейному расстоянию и определяет дальность распространения волны. Кроме того, физический смысл параметра R_0 состоит в том, чтобы охарактеризовать, как далеко начальная точка излучения акустической волны (эффективный источник) находится от области взаимодействия

нелинейных волн. Хорошо видно из безразмерного уравнения (2), что $\varepsilon g(R)$ играет роль эффективного коэффициента вязкости, который помимо отношения диссипации к нелинейным эффектам содержит еще и коэффициент распространения волны [12]. Последний фактор возникает из-за того, что по сравнению с одномерным (плоским) распространением нелинейных волн энергия трехмерных волн распределена по сферической поверхности.

Определим спектр энергии акустической волны

$$E(\omega, R) = V(\omega, R)V^*(\omega, R)$$

через прямое преобразование Фурье

$$V(\omega, R) = F[V(t, R)] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(t, R) \exp(-i\omega t) dt. \quad (4)$$

Тогда обратное преобразование Фурье позволит определить профиль волны

$$V(t, R) = F^{-1}[V(\omega, R)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega, R) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (5)$$

Решение уравнения Бюргера (2) в частотной области можно представить в итерационном виде с шагом ΔR , а F и F^{-1} (обозначают прямое и обратное преобразование Фурье) определены по формулам (4), (5)

$$\begin{aligned} V(\omega, R + \Delta R) &= \\ &= V(\omega, R) + \frac{1}{2} i\omega F[(F^{-1}[V(\omega, R)])^2] \Delta R - \varepsilon \exp(R/R_0) \omega^2 V(\omega, R) \Delta R. \end{aligned} \quad (6)$$

Программа решения эволюционного уравнения Бюргера для сферических случайных волн псевдо-спектральным методом (6) была написана на языке Python.

В качестве начального условия $V(\omega, R=0) = V_0(\omega)$ рассматривался случайный процесс $V_0(\omega) = \xi \sqrt{G_0(\omega)}$, где $\xi = A + iB$ – случайный гауссов процесс, $\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0$ и $\langle A^2 \rangle = \langle B^2 \rangle = 1$, $G_0(\omega)$ – начальный спектр, который выбирался в виде [13]

$$G_0(\omega) = \frac{\sigma_0^2}{\omega_* \sqrt{2\pi}} \left(\frac{\omega}{\omega_*} \right)^{2n} \exp(-\omega^2 / 2\omega_*^2), \quad \sigma_0^2 = 1, \quad \omega_* = 1, \quad n = 1. \quad (7)$$

Максимум спектра находится на частоте $\omega = 2\omega_* = 2$, а характерный масштаб проявления нелинейности равен $z_{nl} = 1/\sigma_0\omega_1 = 1/\sigma_0\omega_*\sqrt{3} \approx 0.58$. Число Рейнольдса Re в экспериментах равнялось 100. Параметры начального спектра: $\sigma_0^2 = 1$, $\omega_* = 1$. Усреднение проводилось по 1000 реализациям, каждая из которых содержит 2^{14} отсчетов.

При численном моделировании были рассмотрены два режима распространения акустического шума с начальным спектром (7): первое – решение исходной нелинейной задачи (6) и второе – решение линейной задачи, которое соответствует искусственному удалению квадратичного члена скорости из правой части уравнения (6). Это было сделано для оценки влияния нелинейности на распространение акустического шума. На рис.1 приведено сравнение эволюции акустического шума для линейного (рис.1а) и нелинейного (рис.1б) режимов распространения на различные расстояния от источника – приведенное расстояние (x/R_0).

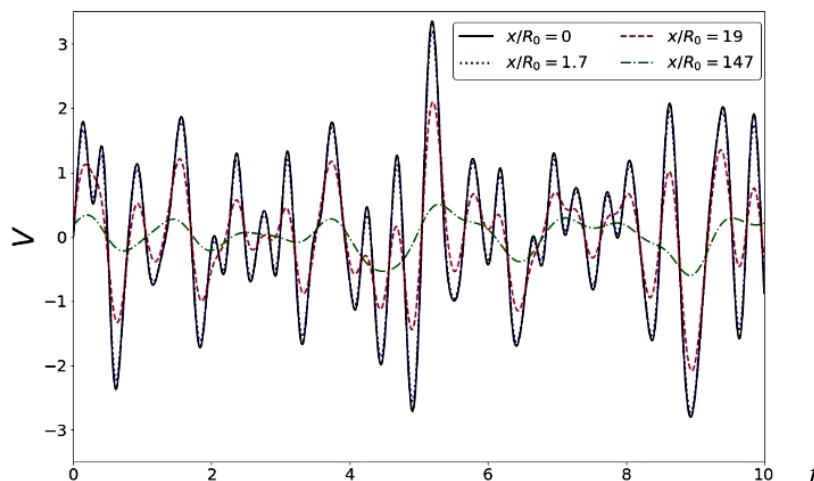


Рис.1а. Эволюция сферической акустической волны для числа Рейнольдса $Re=100$ и различных расстояний от источника x/R_0 для линейной модели решения.

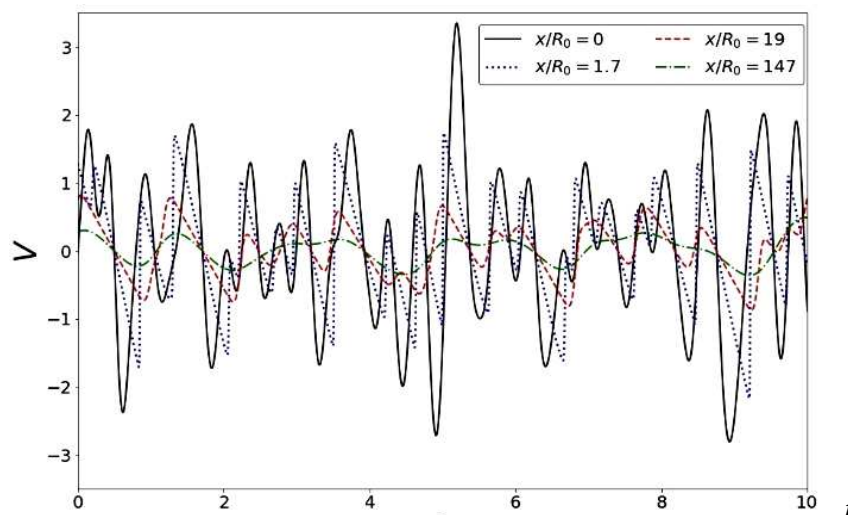


Рис.1б. Эволюция сферической акустической волны для числа Рейнольдса $Re=100$ и различных расстояний от источника x/R_0 для нелинейной модели решения.

Из приведенных выше профилей сферической случайной волны хорошо заметно, что уже при $x/R_0 = 1.7$ для нелинейной модели в решении возникают пилообразные волновые фронты, что приводит в дальнейшем на стадии развитых разрывов к слиянию нелинейных фронтов – наблюдается быстрое затухание амплитуд нелинейных профилей волны по сравнению с режимом линейного распространения сферических случайных волн.

На рис.2 приведены эволюции энергетических спектров для линейной и нелинейной модели численного решения по схеме (6) в частотной области для расстояний до образования разрывов (рис.2а) и на стадии развитых разрывов (рис.2б) в сферической случайной волне.

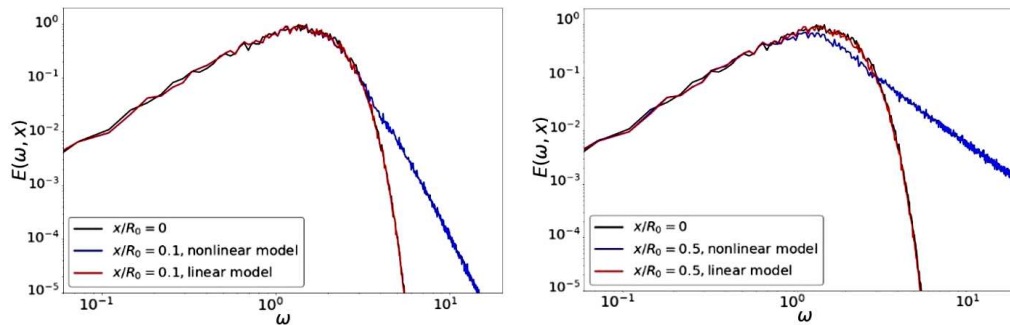


Рис.2а. Эволюция энергетических спектров для числа Рейнольдса $Re=100$ для линейной и нелинейной моделей решения на расстояниях до образования разрыва $x/R_0 = 0.1$ (слева) и $x/R_0 = 0.5$ (справа).

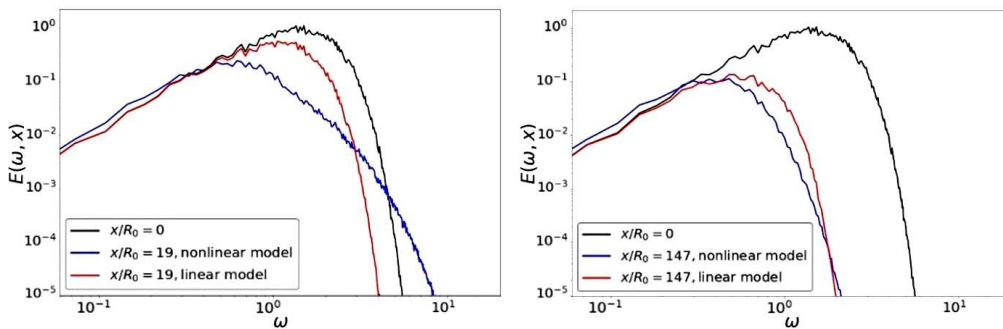


Рис.2б. Эволюция энергетических спектров для числа Рейнольдса $Re=100$ для линейной и нелинейной моделей решения на стадии развитых разрывов $x/R_0 = 19$ (слева) и $x/R_0 = 147$ (справа).

Из рис.2а на небольших расстояниях от источника (до образования разрывов в профилях сферических случайных волн при $r-r_0 < r_{nl}$) видно, что за исключением области высоких частот, нелинейная модель не отличается от линейной модели распространения, за исключением высоких частот – на

спектры практически не влияет нелинейность. На больших расстояниях (рис.2б), которые соответствуют стадии взаимодействия развитых разрывов ($r_{nl} < r - r_0 < r_l$) нелинейное взаимодействие волн приводит к более быстрой диссипации – уменьшению энергии и смещению максимума спектра в область низких частот, что отличается от линейного режима эволюции случайных волн ($x/R_0 = 19$). Также наблюдается отличие линейного и нелинейного решения для энергетических спектров и в высокочастотной части, до тех пор механизм диссипации не станет определяющим для большей части спектра шума ($x/R_0 = 147$).

3. Сверхзвуковая струя LTRAC: моделирование в дальнем поле

Сверхзвуковой недорасширенный струйный поток, рассмотренный в качестве начальных условий, соответствует условиям эксперимента, проведенного в Лаборатории исследования турбулентности в аэрокосмической сфере и горении (LTRAC) [18]. В эксперименте LTRAC сжатый воздух подается в водоотводящую камеру при температуре примерно $T_k=288\text{K}$. Камера статического давления соединена со смесительной камерой в нормальных атмосферных условиях, где были проведены измерения скорости потока методом лазерной диагностики с высоким пространственным разрешением (PIV). Сжатый воздух выходит из осесимметричного сопла $D_j = 15\text{mm}$ с кромкой толщиной 5 мм. Условия полностью расширенного потока соответствуют $M_{fe} = 1.59$, $\text{NPR} = 4.2$, $D_{ef} = 16.73\text{ mm}$ и $\text{Re} = 1.06 \cdot 10^6$. Сопло имеет соотношение площадей на входе и выходе 93.44 с короткой сходящейся секцией так, что поток на выходе является звуковым со скоростью $U_j = 310\text{ m/s}$. Сходящаяся секция состоит из профилированной стенки с радиусом кривизны 67.15 мм и короткой параллельной секции на выходе (рис.3).

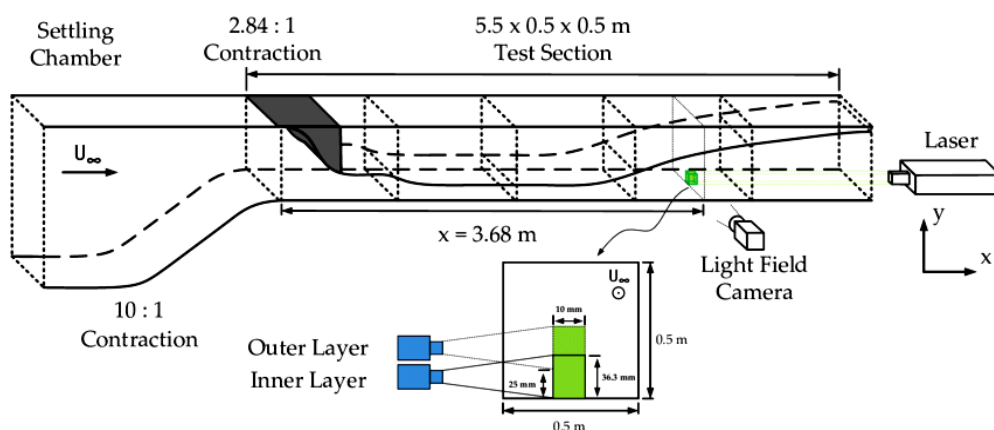


Рис.3. Схема эксперимента LTRAC.

Для моделирования течения струи LTRAC используется схема Кабаре в рамках метода крупных вихрей (MILES). Свойства Кабаре включают низкую дисперсионную и диссипативную ошибку. Использование компактного вычислительного шаблона с разнесенными пространственно-временными переменными и явного асинхронного шага по времени в Кабаре обеспечивает хорошую точность на неоднородных сетках. Неоднородные сетки строятся полуавтоматически, используя утилиту OpenFOAM «snappyHexMesh» (sHM) [14-16]. Сравнение результатов расчета Кабаре для средней продольной скорости течения с экспериментом на двух расчетных сетках представлено на рис.4.

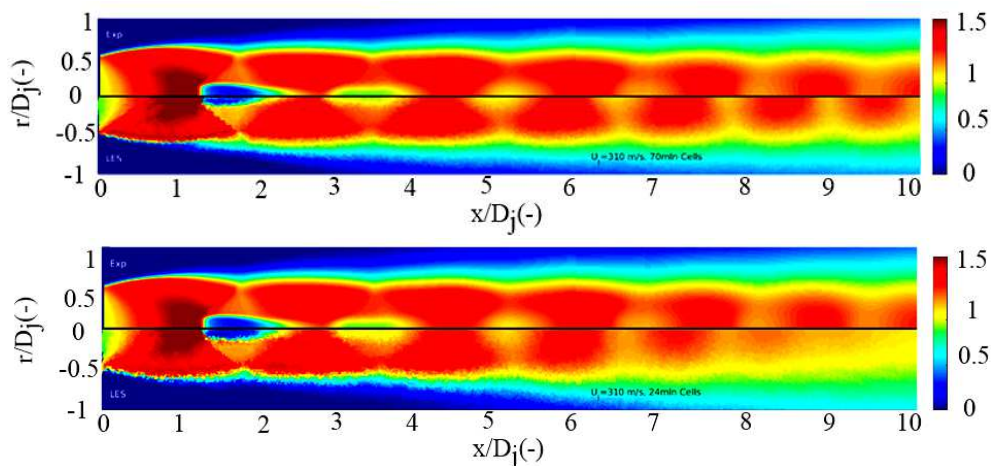


Рис.4. Визуализация сравнения результатов эксперимента и модели (на мелкой сетке 70 млн и грубой сетке 24 млн).

Сетка LES струи LTRAC содержит 41 млн ячеек и начинается от среза сопла. Условия втекания на выходе из сопла задаются с использованием поперечной и радиальной средней скорости потока из данных PIV путем наложения звуковых условий на выходе из сопла и допущения того же давления торможения, что и в камере выше по потоку. Сетка локально сгущается около кромки сопла, а разрешение сетки в продольном, радиальном и азимутальном направлениях составляет $\Delta x/D_j = 0.02$, $\Delta r/D_j = 0.011$, $r\Delta\theta/D_j = 0.02$.

Для более высоких частот текущее решение LES недостаточно разрешено. Тем не менее, основной пик спектров BBSAN около 0.4-0.5 хорошо улавливается решением LES, особенно при угле наблюдения 120° . Пик горба BBSAN на 12-15 дБ выше, чем амплитуда частот около 0.2-0.3, что соответствует пиковому шуму смешения струи для тех же углов бокового наблюдения и отражено на рис.2.

Рассмотрены два начальных условия распространения сферической

волны: спектры акустической скорости, полученные из решения LES-FW-H под углом наблюдателя 90° и 120° . Во-первых, решение LES в акустическом ближнем поле при $0 < x/D_j < 3$ и $r/D_j = 3$ используется для оценки характеристической флуктуации скорости на начальном радиусе источника, который находится недалеко от интенсивного источника BBSAN, но не имеет заметного искажения гидродинамическим полем. Для второго набора начальных условий решение спектров давления, полученное методом FW-H при $R/D_j = 20$ и угле наблюдения 90° к струйному потоку, преобразуется в характеристическое колебание скорости в предположении линейной зависимости между колебанием давления и скорости в акустической волне $u' \sim p' / (\rho \cdot c)$. Для обоих этих наборов данных соответствующую частоту распространения звуковой волны можно оценить по пиковой частоте BBSAN, которая для струи LTRAC составляет 13.12 кГц.

В целом это полностью определяет параметры для численного анализа эволюционного уравнения Бюргерса (2), (3), решение которого описывается псевдо-спектральной схемой в частотной области (6) и сведены в табл.1.

Таблица 1. Входные параметры начальной струи для численного анализа эволюционного уравнения Бюргерса в дальней зоне распространения.

Начальные параметры	r_l	r_{nl}	ε	R_0
LES для $R/D_j = 3$	38841.34	14.6	0.000375802	0.0031
LES и FW-H для $R/D_j = 20$	38841.34	7470	0.1923	0.00004

Можно отметить, что оба набора данных, приведенных в табл.1, качественно соответствуют одному и тому же режиму распространения акустических волн $R^0 \ll r_{nl} \ll r_l$. Это означает, что источник сферических случайных волн расположен вдали от области формирования нелинейных волн и где происходит формирование ударных фронтов и влияние вязкой диссипации.

На следующем этапе акустический спектр под углом наблюдения 90° при $R/D_j = 20$ соответствующим образом масштабируется, а затем используется в качестве начального условия для замены аналитического гауссовского энергетического спектра (7). После определения исходного спектра решается задача распространения сферической волны (2)-(6) для 1000 реализаций. Полученные спектральные решения, усредненные по ансамблю на двух расстояниях от источника, показаны на рисунке как для линейной, так и для нелинейной модели распространения звука. Начальный спектр также приведен на рис.5.

Видно, что нелинейное решение уравнения Бюргерса качественно не отличается от линейного, при этом фронты акустических волн не обнару-

живают значительного укрупнения. Это объясняет, почему для рассматриваемой струи LTRAC нелинейность не играет роли для формирования спектров шума в дальней зоне.

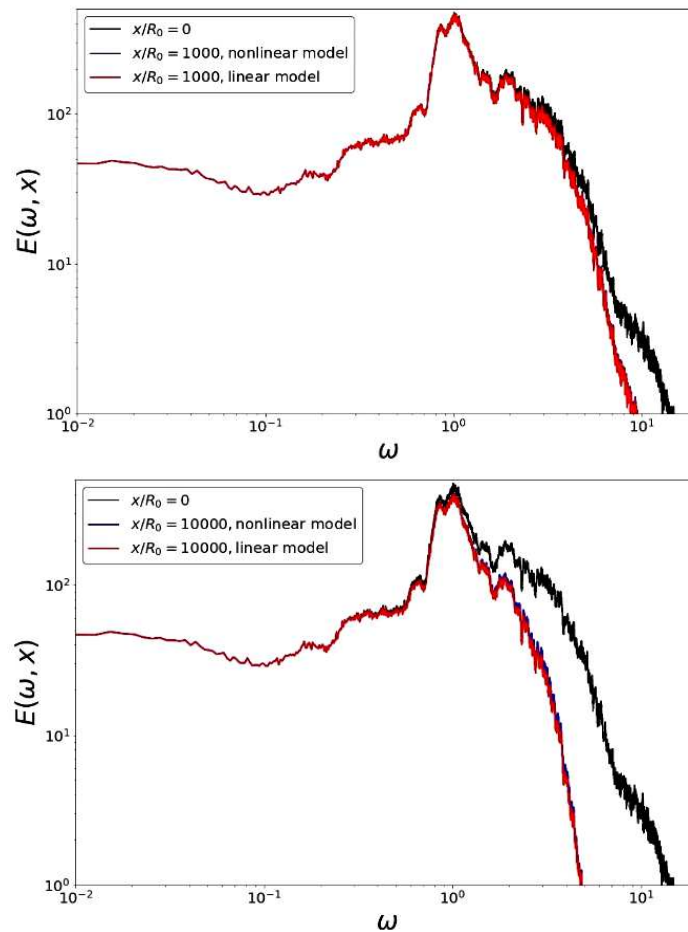


Рис.5. Энергетический спектр сверхзвуковой струи LTRAC в дальнем поле на расстояниях около $20.000 D_j$ (а) и $200.000 D_j$ (б). Начальный спектр определялся из LES и FW-H метода решения для расстояний $20 D_j$ от сопла. Приведено сравнение линейной и нелинейной модели моделирования уравнения Бюргерса.

4. Заключение

Для ответа на вопрос, могут ли нелинейные акустические эффекты распространения быть важными для исследуемого случая струи LTRAC на большие расстояния распространения, рассматривается обобщенная модель Бюргерса, которая описывает распространение сферических волн. Для численного решения уравнения Бюргерса используется псевдо-спектральный метод решения в частотной области для получения энергетических спек-

тров сферической акустической волны на различных расстояниях от источника. Показано, что, в соответствии с теорией, в зависимости от того, как расстояние волны от источника соотносится с нелинейным и линейно-вязким масштабами задачи, численное решение выявляет либо начальный линейный режим, либо нелинейный режим взаимодействия волн, либо линейный режим вязкой диссипации. Кроме того, используя LES-решение для струи LTRAC в качестве входных данных для уравнения Бюргерса, было показано, что даже на расстояниях волны до 200 000 диаметров сопла от выхода из сопла (расстояние 3 км) распространение звука полностью определяется линейными эффектами, где эффекты нелинейного взаимодействия шумовых волн пренебрежимо малы. Следовательно, случай рассматриваемой струи LTRAC попадает в категорию мелкомасштабных сверхзвуковых струй, где нелинейные волновые эффекты, важные для струи в ближнем поле, становятся совершенно незначительными для распространения акустической волны в дальней зоне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *C.L. Morfey, G.P. Howell.* Nonlinear propagation of aircraft noise in the atmosphere// *AI-AA J.*, 1981, v.19, p. 986-992.
2. *S.N. Gurbatov, O.V. Rudenko.* Statistical phenomena, in *Nonlinear Acoustics*, edited by M.F. Hamilton and D.T. Blackstock (Academic, San Diego, CA), Chap. 13, 1998, p.377-398.
3. *W. Baars, C. Tinney, M. Wochner, M. Hamilton.* On cumulative nonlinear acoustic waveform distortions from high-speed jets // *J. Fluid Mech.*, 2014, v.749, p.331-366.
4. *M.F. Hamilton.* Effective Gol'dberg numbers for diverging waves // *J. Acoust. Soc. Am.*, 2016, v.140, №6, p.4419-4426.
5. *K.L. Gee, V.W. Sparrow, M.M. James, J.M. Downing, C.M. Hobbs, T.B. Gabrielson, A.A. Atchley.* The role of nonlinear effects in the propagation of noise from high-power jet aircraft // *J. Acoust. Soc. Am.*, 2008, v.123, №6, p.4082-4093.
6. *P. Pineau, C. Bogey.* Numerical investigation of wave steepening and shock coalescence near a cold Mach 3 jet // *J. Acoust. Soc. Am.*, 2021, v.149, p.357-370.
7. *D.M. Edgington-Mitchell, K. Oberleithner, D.R. Honnery, J. Soria.* Coherent structure and sound production in the helical mode of a screeching axisymmetric jet // *J. Fluid Mech.*, 2014, v.748, p.822-847.
8. *J.E. Ffowcs Williams, D.L. Hawkings.* Sound Generation by Turbulence and Surfaces in Arbitrary Motion // *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1969, v.264, №1151, p.321-342.
9. *M.L. Shur, P.R. Spalart, M.Kh. Strelets.* Noise Prediction for increasingly complex jets. Part I: Methods and tests. Part II: Applications // *Int. J. Aeroacoustics*, 2005, v.34, №4, p.21366.
10. *С.Н. Гурбатов, О.В. Руденко, А.И. Саичев.* Волны и структуры в нелинейных средах

- без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. – М.: Физматлит, 2008, 496 с.;
S.N. Gurbatov, O.V. Rudenko, A.I. Saichev. Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media. – Berlin – Heidelberg: Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag, 2011, 472 p.
11. *С.Н. Гурбатов, И.Ю. Демин, В.В. Черепенников, Б.О. Энфло.* Поведение интенсивных акустических шумов на больших расстояниях // *Акуст. ж.*, 2007. т.53, №1. с.55-72;
S.N. Gurbatov, I.Yu. Demin, V.V. Cherepennikov, B.O. Enflo. Behavior of Intense Acoustic Noise at Large Distances // *Acoustical Physics*, 2007. v. 53, № 1, p. 48–63.
 12. *S.N. Gurbatov, O.V. Rudenko, A.V. Tyurina.* Singularities and spectral asymptotics of a random nonlinear wave in a nondispersive system // *Wave Motion*, 2020, v.95, p.102519.
 13. *V.A. Semiletov, S.A. Karabasov.* CABARET scheme with conservation-flux asynchronous time-stepping for nonlinear aeroacoustics problems // *Journal of Computational Physics*, 2013, v.253, №15, p.157165.
 14. *A.P. Markesteijn, S.A. Karabasov.* CABARET solutions on Graphics Processing Units for NASA jets: grid sensitivity and unsteady inflow condition effect // *Comptes Rendus Mécanique*, 2018, v.346, №10, p.948-963.
 15. *A.P. Markesteijn, S.A. Karabasov.* Simulations of co-axial jet flows on Graphics Processing Units: the flow and noise analysis // *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2019, v.377, p. 2159.

Поступила в редакцию 21.02.22

После доработки 21.02.22

Принята к публикации 18.04.22