

УДК 534.222.2

## РАДИАЦИОННАЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ТВЕРДОТЕЛЬНЫЙ СФЕРИЧЕСКИЙ РАССЕИВАТЕЛЬ В ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ КВАЗИГАУССОВСКОГО ПУЧКА

© 2017 г. А. В. Николаева\*, О. А. Сапожников

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”*

\*E-mail: av.nikolaeva@physics.msu.ru

Исследована радиационная сила, возникающая при рассеянии квазигауссовского акустического пучка на находящемся в жидкости однородном упругом шаре. Показано, что сила немонотонно зависит от соотношения между диаметрами шара и перетяжки пучка. При заданной мощности пучка радиационная сила является максимальной, когда диаметры примерно равны. В качестве причины указанного эффекта отмечается резонансное возбуждение поперечных волн в шаре под воздействием акустической волны в окружающей жидкости.

DOI: 10.7868/S0367676517010203

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время быстро развивающимся направлением прикладной акустики является использование ультразвуковых волн в медицине и промышленных технологиях. При этом используются не только традиционные способы ультразвукового воздействия на среду посредством нагрева или кавитации, но и более тонкие нелинейные явления, одним из которых является возникновение радиационного давления (акустической радиационной силы). Так, несколько лет назад была предложена новый метод лечения мочекаменной болезни, заключающийся в неинвазивном выталкивании из почки мелких камней под воздействием ультразвукового пучка [1, 2]. Достаточно давно была обнаружена возможность перемещения и левитации малых рассеивателей за счет эффекта радиационного давления ультразвука [3]. В ряде работ исследована радиационная сила в случае рассеивателей, размеры которых сравнимы с длиной волны, и предложены различные методики экспериментального измерения величины силы [4, 5].

Для оптимизации радиационного силового воздействия на рассеиватель важно иметь эффективный численный алгоритм для точного и быстрого расчета радиационной силы, чтобы иметь возможность определения зависимости радиационной силы от диаметра и упругих свойств рассеивателя, а также от поперечного размера, интенсивности и частоты акустического пучка. В настоящей работе предлагается такой алгоритм для случая упругого сферического рассеивателя и

квазигауссовского акустического пучка и анализируется зависимость величины радиационной силы от соотношения между диаметрами рассеивателя и пучка.

### ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Как известно, радиационная сила возникает в результате рассеяния падающего акустического пучка на исследуемом теле. Соответственно расчет радиационной силы основан на анализе рассеяния для исследуемого акустического пучка. В случае квазигауссовского пучка соответствующая задача может быть решена с использованием результатов, полученных в работе [6]. Рассмотрим коротко алгоритм расчета.

В качестве решения уравнения Гельмгольца для падающего квазигауссовского пучка можно использовать следующее [6]

$$p_i = p_0 \frac{z_d}{2\text{sh}^2(kz_d)} \times \left[ e^{kz_d} \frac{\sin\left(k\sqrt{r_\perp^2 + (z - iz_d)^2}\right)}{\sqrt{r_\perp^2 + (z - iz_d)^2}} - e^{-kz_d} \frac{\sin\left(k\sqrt{r_\perp^2 + (z + iz_d)^2}\right)}{\sqrt{r_\perp^2 + (z + iz_d)^2}} \right], \quad (1)$$

где  $p_i$  — комплексная амплитуда акустического давления в падающей волне,  $p_0$  — исходная ам-

плитуда волны на оси пучка,  $k = \omega/c$  – волновое число,  $c$  – скорость звука в жидкости,  $z_d = ka_0^2/2$  – длина дифракционной расходимости пучка,  $a_0$  – радиус перетяжки пучка,  $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$  – поперечная координата (расстояние от оси пучка). Решение (1) представляет собой суперпозицию двух пар “источник–сток”, что обеспечивает отсутствие волны, распространяющейся во встречном направлении, и исключает появление особенностей и точек ветвления в решении. Представление (1) описывает пучки при произвольной степени их сфокусированности, в том числе при фокальной перетяжке размером порядка дифракционного предела ( $ka_0 \leq 1$ ). При  $kz_d \gg 1$  выражение (1) переходит в решение для гауссова пучка.

Структура квазигауссовского пучка, представленного в виде (1), зависит от численного значения параметра  $ka_0$ . При фиксированном значении радиуса пучка  $a_0$  и  $ka_0 = 1$  структура волны слабо напоминает направленный пучок. Однако уже при  $ka_0 = 2$  направленность выражена более явно, и расходимость квазигауссовского пучка уменьшается с последующим ростом  $ka_0$ .

Так как радиационная сила возникает в результате частичной передачи количества движения рассеиваемому объекту, в первую очередь необходимо решить задачу рассеяния. Для ее решения и последующего расчета радиационной силы рассмотрим сначала более общий случай произвольного аксиально-симметричного падающего пучка. Запишем комплексную амплитуду акустического давления в таком пучке в виде разложения по сферическим гармоникам:

$$p_i = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n j_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (2)$$

где  $r$  и  $\theta$  – сферические координаты,  $P_n(\cos \theta)$  – полиномы Лежандра,  $j_n(x)$  – сферические функции Бесселя. Рассеянная волна в случае падения пучка вида (2) на аксиально-симметричный рассеиватель сохраняет свойство осевой симметрии и поэтому в общем случае может быть записана в виде

$$p_s = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Q_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta), \quad (3)$$

где  $h_n^{(1)}(kr)$  – сферические функции Ханкеля, а коэффициенты  $c_n$  характеризуют рассеяние соответствующей сферической гармоники. Для случая, когда рассеиватель представляет собой изотропный упругий шар с центром в начале координат (именно этот случай рассматривается ниже),

выражения для коэффициентов рассеяния  $c_n$  имеют известный аналитический вид, приведенный в работах [7–10].

В общем случае радиационная сила, как величина векторная, имеет три декартовы компоненты и может перемещать миллиметровые объекты в произвольных направлениях. Когда и пучок, и рассеиватель являются аксиально-симметричными, сохраняется лишь компонента  $F_z$ , перемещающая рассеиватель вдоль оси распространения. Она может быть выражена через коэффициенты  $c_n$  и  $Q_n$  следующим образом [7, 8]:

$$F_z = \frac{2\pi}{\rho c^2 k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \times \text{Im} \left\{ Q_n Q_{n+1}^* (c_n + c_{n+1}^* + 2c_n c_{n+1}^*) \right\}. \quad (4)$$

Для применения общего выражения (4) к конкретному виду падающего пучка коэффициенты разложения удобно записать в виде

$$Q_n = p_0 i^n (2n+1) g_n(kz_d). \quad (5)$$

Здесь множитель  $g_n(kz_d)$  учитывает отличие пучка от плоской волны (решение для плоской волны соответствует случаю  $g_n = 1$ ). Для квазигауссовского пучка вида (1) зависимость  $g_n(kz_d)$  может быть выражена аналитически [6]:

$$g_n(x) = \frac{1 - (-1)^n e^{-2x}}{(1 - e^{-2x})^2} e^{-x} \sqrt{2\pi x} I_{n+1/2}(x), \quad (6)$$

где  $I_{n+1/2}(x)$  – функция Инфельда.

## ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

Соотношения (4)–(6) используют для численного расчета величины радиационной силы со стороны квазигауссовского пучка на упругий сферический рассеиватель в жидкости. Вычисления проводили в среде Fortran. Суммирование выражения (4) ведется от  $n = 0$  до  $n = (5-7)ka$ .

Расчеты проводили для двух типов упругих сфер. Один рассеиватель из материала СОМ (СОМ – оксалат моногидрат кальция или вевелит), характеристики которого наиболее близки к одному из типов реально встречающихся в почке камней: плотность  $\rho_* = 2038 \text{ кг/м}^3$ , скорость продольных и поперечных волн соответственно  $c_l = 4535 \text{ м/с}$ ,  $c_t = 2132 \text{ м/с}$  [11]. Второй рассматриваемый рассеиватель – камень, изготовленный из материала U-30 (Ultracal,  $\rho_* = 1700 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_l = 2630 \text{ м/с}$ ,  $c_t = 1330 \text{ м/с}$ ), который часто используют для создания модельных почечных камней [12].

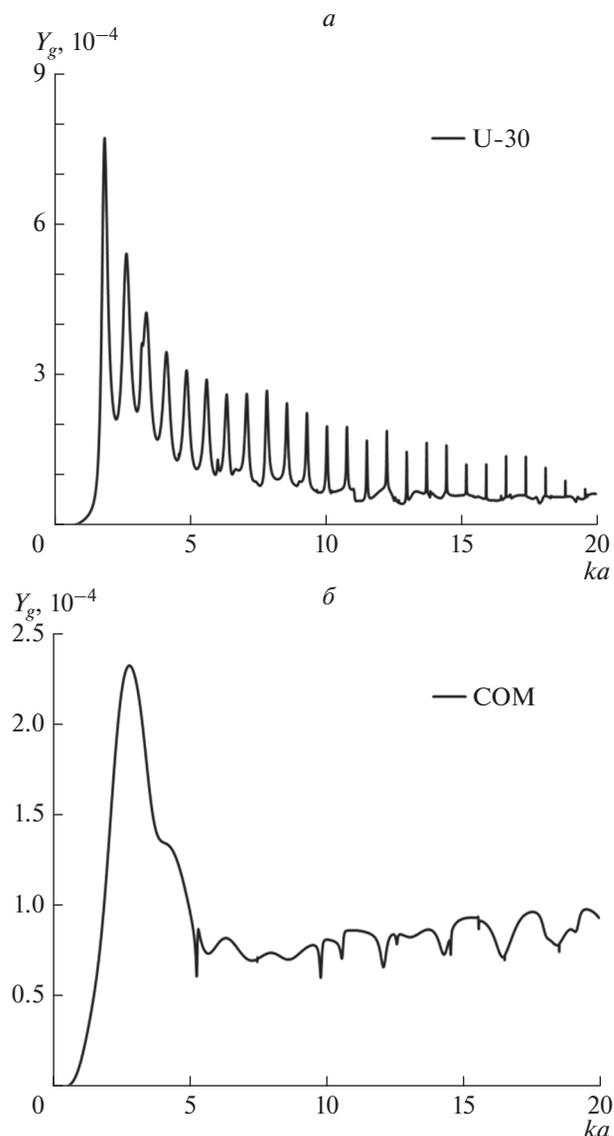
Для двух типов рассеивателей построены зависимости нормированной на акустическую мощность пучка величины радиационной силы

$$Y_g = F_z c / W \quad (W = \frac{\pi a_0^2 p_0^2 \operatorname{ch}(kz_d)}{4\rho c \operatorname{sh}(kz_d)})$$

— акустическая мощность квазиганговского пучка [6]) от параметра  $ka$  при фиксированном отношении радиуса перетяжки  $a_0$  к радиусу рассеивателя  $a$  (рис. 1). Переменной величиной является волновое число  $k = 2\pi f/c$ , пропорциональное частоте акустической волны. Величина радиационной силы монотонно зависит от радиуса рассеивателя, и характер этой зависимости связан с упругими свойствами материала сферического объекта. Появление локальных провалов и пиков связано с резонансными колебаниями рассеивателя на определенных частотах. Построение такого типа зависимостей для конкретных материалов позволяет определять частоты, на которых при одной и той же мощности излучения достигается максимальная величина радиационной силы или частоты, которых стоит избегать вследствие неэффективной генерации силы.

Кроме того, для рассматриваемых рассеивателей построены зависимости нормированной радиационной силы  $Y_g = F_z c / W$  от радиуса перетяжки пучка  $a_0$  при различных фиксированных значениях радиуса рассеивателя  $a$ . Рассчитанные зависимости представлены на рис. 2.

Полученный результат может показаться парадоксальным. Естественно предположить, что с увеличением радиуса перетяжки пучка сила монотонно убывает, так как все большая часть энергии волны проходит мимо рассеивателя, не оказывая на него никакого воздействия. Это означает, что величину радиационной силы можно ожидать наибольшей тогда, когда радиус ультразвукового пучка гораздо меньше радиуса рассеивателя ( $a_0 \ll a$ ), так как при этом пучок полностью попадает на шар, оказывая на него максимальное силовое воздействие. Однако зависимость для  $ka = 3$ , представленная на рис. 2, противоречит данному предположению. Согласие есть лишь в области  $a_0 \gg a$ , когда радиус перетяжки значительно превышает радиус пучка, часть энергии проходит мимо, и соответствующая сила действительно уменьшается. В то же время максимальное значение радиационной силы достигается не при  $a_0 \ll a$ , а при радиусе перетяжки сравнимом с радиусом пучка ( $a_0 \approx a$ ), когда пучок “обтекает” рассеиватель. Таким образом, несмотря на то что, казалось бы, некоторая часть энергии проходит мимо рассеивателя, оказываемая на него сила возрастает по сравнению со случаем  $a_0 \ll a$ . При различных конфигурациях между  $a_0$  и  $a$  разница в силе по сравнению со случаем очень узкого пучка

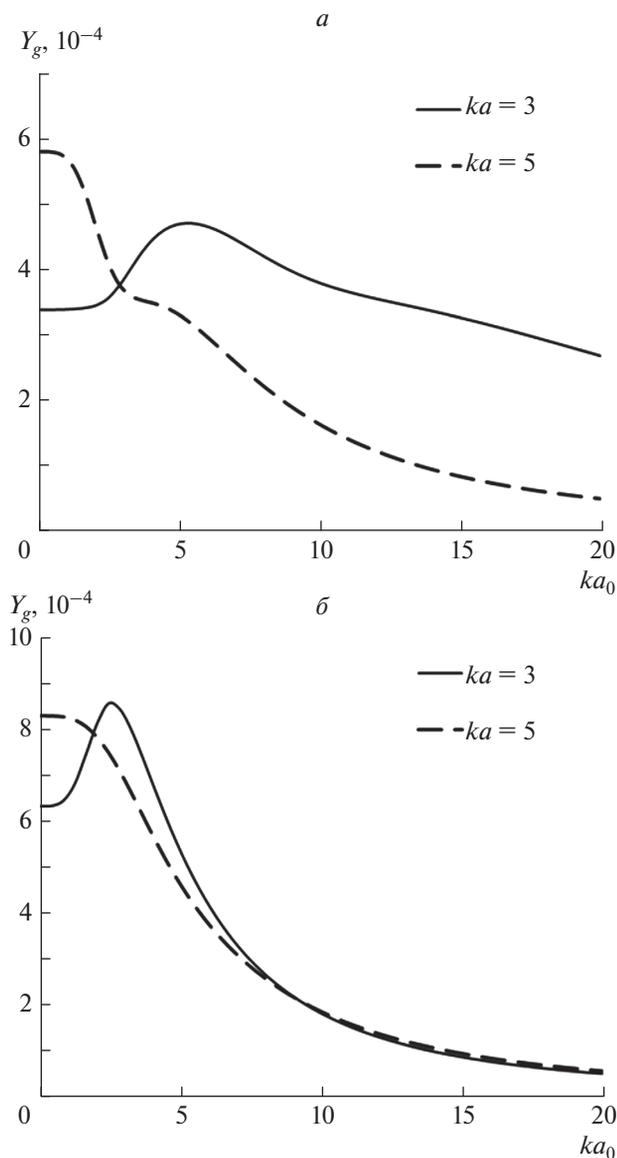


**Рис. 1.** Зависимость нормированной величины радиационной силы от параметра  $ka$  при фиксированном отношении радиуса пучка к радиусу рассеивателя ( $a_0/a = 1$ ) для двух типов материалов: U-30 (а) и COM (б).

может достигать 40%. При  $ka = 5$  и для COM, и для U-30 рассмотренного эффекта не наблюдается. Вероятнее всего, связано это с тем, что при данном параметре характерная зависимость радиационной силы от  $ka$  оказывается в одной из точек минимума и эффект радиационной силы проявляется довольно слабо (рис. 1).

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Чтобы понять причину возникновения полученного выше эффекта, необходимо обратиться к



**Рис. 2.** Зависимость нормированной величины радиационной силы от радиуса перетяжки квазигaussianовского пучка  $ka_0$  при различных фиксированных значениях параметрах  $ka$  ( $ka = 3, 5$ ;  $a = 2.5$  мм). Графики построены для двух типов упругих сферических рассеивателей: U-30 (а) и СОМ (б).

более раннему исследованию по разрушению почечных камней [13]. В работе было показано, что при воздействии на рассеиватель ударными импульсами возникающие в нем напряжения напрямую зависят от генерируемых в рассеивателе

поперечных волн. Кроме того, максимальная величина напряжения достигается в том случае, когда размеры фокальной области акустического импульса немного превышают линейный размер камня. Таким образом, наиболее эффективно камень разрушается, когда распространяющийся импульс как бы обтекает рассеиватель. Указанный вывод применим и к рассматриваемой в работе ситуации. Основной причиной эффекта достижения максимального значения радиационной силы в случае, когда размеры рассеивателя и квазигaussianовского пучка сравнимы друг с другом, является то, что при распространении ультразвукового пучка через рассеиватель возникающие в нем сдвиговые волны имеют скорость, близкую к скорости распространения звука в жидкости. Таким образом, на рассеивателе возникают боковые области, которые активно захватывают энергию проходящего “обтекающего” рассеиватель пучка, тем самым способствуя проникновению в него волновой энергии и более эффективной передаче ему количества движения.

Работа выполнена при поддержке грантами РФФИ № 14-02-00426, НИИ DK43881 и NSBRI/NASA NCC 9-58.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shah A., Herper J.D., Lu W. et al.* // J. Urol. 2012. № 187. P. 739.
2. *Bailey M.R., Wang Y.N., Simon J.C. et al.* // J. Acous. Soc. Am. 2013. № 133. P. 3279.
3. *Sarvazyan A.P., Rudenko O.V., Nyborg W.L.* // Ultrasound in Med. & Biol. 2010. № 36 (9). P. 1379.
4. *Chen S., Silva G.T., Kinnick R. et al.* // Phys. Rev. 2005. E 71. 056608.
5. *Николаева А.В., Цысарь С.А., Сапожников О.А.* // Акуст. журн. 2016 Т. 62. № 1. С. 29.
6. *Сапожников О.А.* // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 1. С. 49.
7. *Chen X., Apfel R.E.* // J. Acoust. Soc. Am. 1996. № 99. P. 713.
8. *Sapozhnikov O.A., Bailey M.R.* // J. Acous. Soc. Am. 2013. № 133 (2). P. 661.
9. *Westervelt P.J.* // J. Acoust. Soc. Am. 1951. № 23. P. 312.
10. *Farah J.J.* // J. Acoust. Soc. Am. 1951. № 23. P. 405.
11. *Heimbach D., Munver R., Zhong P. et al.* // J. Urology. 2000. № 164. P. 537.
12. *McAteer J.A., Williams J.C., Jr., Cleveland R.O. et al.* // Urol. Res. 2005. № 33(6). P. 429.
13. *Cleveland R.O., Sapozhnikov O.A.* // J. Acoust. Soc. Am. 2005. № 118(4). P. 2667.