

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 542.34

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АКУСТИЧЕСКОЙ ГОЛОГРАФИИ
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УЛЬТРАЗУКОВЫХ ИСТОЧНИКОВ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

© 2011 г. С. А. Цысарь¹, Е. Д. Синельников², О. А. Сапожников^{1,3}

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
119991 Москва, Ленинские горы

² Sound Interventions, Inc., 25 Health Sciences Drive, Suite 201, Box 4201, Stony Brook, NY 11790, USA

³ Applied Physics Laboratory, University of Washington,
Seattle, WA 98105, USA

E-mail: sergey@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 29.07.10 г.

В работе приводятся результаты исследования распределения колебательной скорости по поверхности цилиндрических ультразвуковых преобразователей методом акустической голографии. Описаны два подхода для акустической голографии: метод пространственного спектра и метод интеграла Рэлея. Первый из них, спектральный метод, в случае цилиндрических источников имеет специфику по сравнению со случаем квазиплоских источников: мелкомасштабные компоненты спектра, имеющие вид затухающих (нераспространяющихся) волн вблизи от источника, с удалением от источника превращаются в распространяющиеся волны. Использование таких волн смешанного типа позволяет повысить разрешающую способность голографии. Для возможности проведения голографии цилиндрических источников методом интеграла Рэлея предложена модификация, заключающаяся в наложении ограничений на область интегрирования. Приводятся результаты численного моделирования и физических экспериментов по голографии цилиндрических пьезопреобразователей. Показано, что предложенные методы голографии позволяют восстановить структуру колебания поверхности источников вплоть до масштабов порядка длины волны.

Ключевые слова: акустическая голография, обращение волнового фронта, цилиндрические преобразователи.

ВВЕДЕНИЕ

Для повышения качества ультразвуковой диагностики и сохранения высокой избирательности воздействия в терапии важно уметь рассчитывать пространственно-временную структуру акустического поля. Очевидно, что любая неточность или ошибка при использовании ультразвука в диагностике и терапии связаны с риском для здоровья пациентов. Поэтому требуется знать истинное распределение полей медицинских преобразователей в пространстве; в частности, для многоэлементных диагностических антенных решеток необходимо отслеживать возникновение и характер нежелательных боковых лепестков и паразитных максимумов, а для устройств больших волновых размеров, применяемых в терапии и хирургии, необходимо как можно точнее рассчитывать интенсивность ультразвука и размеры фокальной перетяжки. Точно предсказать тонкую пространственную структуру акустических полей невозможно без знания характера колебаний поверхности преобразователя. В то время как характеристики электронных устройств (генераторов,

усилителей, осциллографов) могут быть легко измерены и учтены при проведении измерений, параметры самих ультразвуковых преобразователей обычно известны недостаточно хорошо. Фирмы, производящие ультразвуковые преобразователи, в качестве паспортных данных сообщают лишь одномерные характеристики типа частотного или импульсного откликов; в лучшем случае приводится диаграмма направленности в дальней зоне. Поэтому на практике для описания структуры акустического поля источников приходится прибегать к определенным предположениям относительно структуры колебаний поверхности источников. Обычно принимается, что распределение нормальной компоненты колебательной скорости на поверхности преобразователя является равномерным, т.е. преобразователь колеблется как жесткий поршень. Однако истинное распределение поля вдоль поверхности пьезоэлектрических источников ультразвука, как правило, далеко от “поршневого” [1, 2]. Поэтому параметры всей системы, рассчитанные с использованием поршневого приближения (такие

как диаграмма направленности, положение фокуса, интенсивность в определенных точках, степень симметрии поля и другие), могут заметно отличаться от действительных, что приводит к ошибкам, зачастую неприемлемым для ряда приложений.

Для нахождения поля на источнике весьма перспективным является метод акустической голографии, который позволяет восстановить распределение колебательной скорости на поверхности преобразователя. Используя эти данные, с высокой степенью точности можно рассчитать акустическое поле, создаваемое преобразователем. Работоспособность этого метода для плоских и сферически сфокусированных источников была подтверждена в наших предыдущих работах [2–4]. В медицинских приложениях и в гидроакустике, помимо указанных, используются также цилиндрические ультразвуковые пьезопреобразователи, распределение колебательной скорости на поверхности которых неизвестно. Примером использования цилиндрических источников в ультразвуковой хирургии является способ лечения мерцательной аритмии, в котором с помощью высокочастотного (порядка 9 МГц) цилиндрического излучателя производится термическое воздействие на стенку легочной вены [5]. Для успешного решения указанной задачи важно знать точное распределение колебательной скорости на поверхности излучателя.

Целью настоящей работы является исследование распределения колебательной скорости по поверхности цилиндрических ультразвуковых преобразователей методом акустической голографии. Акустическая голография источников может быть реализована несколькими способами, среди которых самыми простыми и эффективными являются два. Один из вариантов основан на использовании пространственного спектрального метода (“Фурье-акустика”), второй – на принципе обращения времени и использовании интеграла Рэлея.

МЕТОД ФУРЬЕ-АКУСТИКИ ДЛЯ ГОЛОГРАФИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ

В рамках классической Фурье-акустики акустическое поле разлагается по плоским волнам разных направлений (метод углового спектра) [6]. Когда плоскость измерений расположена очень близко к источнику и имеется возможность измерить неоднородные волны, проявляется уникальная особенность этого метода, которая позволяет восстановить структуру источника с пространственным разрешением меньше длины волны. Соответствующая процедура расчета обратного распространения называется “акустической го-

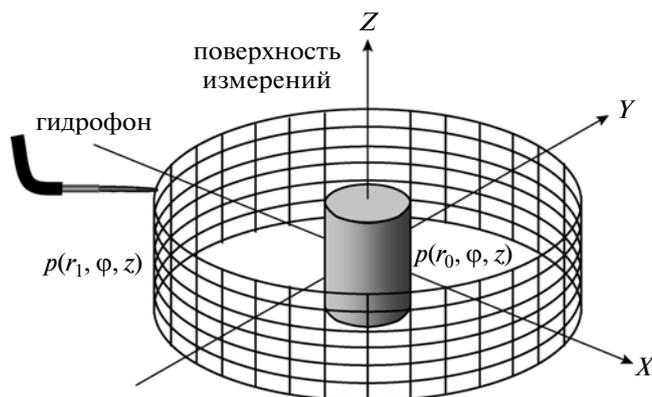


Рис. 1. Расположение излучающего цилиндра и поверхности измерений.

лографией ближнего поля¹” [7, 8]. Когда же поверхность измерений располагается на удалении от источника (расстояния порядка нескольких длин волн и более), неоднородные волны теряются на фоне шумов, и пространственное разрешение метода ограничивается обычным дифракционным пределом (порядка длины волны). В этом случае существует только приближенное решение обратной задачи. Тем не менее, для частот мегагерцового диапазона в жидкостях это приближение является приемлемым и обеспечивает высокую точность для ряда приложений [2].

Описание цилиндрических источников и создаваемых ими акустических полей удобно производить в цилиндрических координатах (r, φ, z) . Рассмотрим цилиндр радиуса r_0 , ось которого совпадает с осью цилиндрической системы координат (рис. 1). Цилиндр излучает на частоте f гармоническую волну, в которой акустическое давление около излучателя описывается неизвестным распределением $p(r_0, \varphi, z)$. В линейном случае для акустического давления $p(r, \varphi, z)$ справедливо уравнение Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = 0, \tag{1}$$

где $k = \omega/c$ – волновое число, $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2 + r^{-2}\partial^2/\partial \varphi^2$ – оператор Лапласа. Акустическое давление на цилиндрической поверхности $r = \text{const}$ может быть представлено в виде ряда Фурье по φ (в силу периодичности

¹ Строго говоря, такую голографию правильнее называть голографией *сверхближнего* поля, поскольку традиционно определяемое ближнее поле источника простирается до расстояния $\sim D^2/\lambda$ (D – диаметр источника, λ – длина волны) и поэтому для источников больших волновых размеров намного превышает длину волны.

поля по полярному углу) и интеграла Фурье по z [9]:

$$p(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z P_m(k_z; r) e^{ik_z z}, \quad (2)$$

Здесь волновое число k_z задает пространственную частоту в направлении оси z , а номер m характеризует частоту осцилляций в зависимости от полярного угла (число m равно количеству периодов выбранной спектральной компоненты при полном обходе окружности цилиндра). Аналогично тому, как в случае плоских источников, пространственный спектр представляет собой разложение поля по плоским волнам разных направлений, представление (2) выражает поле цилиндрических источников в виде суперпозиции “винтовых” волн, волновые фронты которых в дальней зоне принимают коническую форму [6]. Значение спектральной амплитуды $P_m(k_z; r)$ можно получить, применив обратное преобразование Фурье к обеим частям выражения (2):

$$P_m(k_z; r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ik_z z} p(r, \varphi, z). \quad (3)$$

Подставив (2) в (1), приходим к уравнению Бесселя для функции $P_m(k_z; r)$. Его решения, соответствующие расходящимся волнам, выражаются через функции Ханкеля: $P_m(k_z; r) = \text{const} H_m^{(1)}(k_r r)$, где $k_r = \sqrt{k^2 - k_z^2}$. В результате для двух произвольных значений радиальной координаты $r = r_0$ и $r = r_1$ получим выражение, связывающее пространственные спектры акустического давления в расходящейся волне на разных цилиндрических поверхностях:

$$P_m(k_z; r_1) = \Pi_m(k_z; r_0, r_1) P_m(k_z; r_0), \quad (4)$$

где множитель $\Pi_m(k_z; r_0, r_1)$, часто называемый “пропагатором” [10], выражается через отношение соответствующих функций Ханкеля:

$$\Pi_m(k_z; r_0, r_1) = \frac{H_m^{(1)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} r_1)}{H_m^{(1)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} r_0)}. \quad (5)$$

Таким образом, если известно распределение акустического давления на какой-либо цилиндрической поверхности $r = r_0$, то с помощью выражений (2)–(5) можно рассчитать, каким будет давление на любой цилиндрической поверхности $r = r_1 > r_0$. С другой стороны, выписанные выражения позволяют решить и обратную задачу: если известно распределение давления при $r = r_1$, то

по нему можно вычислить исходное распределение давления на источнике $r = r_0 < r_1$:

$$P_m(k_z; r_0) = \frac{P_m(k_z; r_1)}{\Pi_m(k_z; r_0, r_1)}. \quad (6)$$

В этом и состоит суть спектрального метода голографии цилиндрических источников [8, 11].

В некоторых случаях интерес представляет не акустическое давление, а нормальная компонента колебательной скорости v_r на поверхности источника. Голографическая задача в такой постановке решается аналогично. Из уравнения движения следует, что компоненты пространственного спектра акустического давления и радиальной колебательной скорости связаны следующим образом: $V_m(k_z; r) = -i(\rho\omega)^{-1} dP_m(k_z; r)/dr$, где ρ – плотность среды. Согласно (4) и (5) имеем

$$V_m(k_z; r_0) = -i \frac{k_r}{\rho c k} \frac{H_m^{(1)'}(k_r r_0)}{H_m^{(1)}(k_r r_1)} P_m(k_z; r_1), \quad (7)$$

где $H_m^{(1)'}(\xi) = dH_m^{(1)}(\xi)/d\xi$ – производная функции Ханкеля по аргументу. После нахождения спектральной амплитуды $V_m(k_z; r_0)$ значение нормальной компоненты колебательной скорости на поверхности источника найдется посредством обратного преобразования Фурье:

$$v_r(r_0, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z V_m(k_z; r_0) e^{ik_z z}. \quad (8)$$

Формулы (3), (7) и (8) позволяют найти распределение скорости на поверхности источника по результатам измерения давления на окружающей его цилиндрической поверхности.

Выписанные выше формулы задают точное решение задачи о нахождении поля на цилиндрическом источнике по известному полю на некотором расстоянии от него. Однако при практической реализации описанного алгоритма точный расчет оказывается невозможным по нескольким причинам. Наряду с чисто техническим ограничением, обусловленным проведением измерений в конечном числе точек, существует более принципиальная проблема, связанная с наличием нераспространяющихся (“неоднородных”) волн. Эта дифракционная особенность хорошо известна в случае плоских источников, для которых амплитуда неоднородных волн затухает с расстоянием по экспоненте. Наличие шумов измерительной системы приводит к тому, что параметры неоднородных волн не могут быть с достаточной точностью измерены на больших расстояниях от источника. В результате описанный выше алгоритм решения обратной задачи нахождения поля на источнике становится некорректным и его формальное применение приводит к большим

ошибкам. Практическим решением здесь является отбрасывание неоднородных волн. При таком подходе задача становится корректной, но неоднородности меньше длины волны не восстанавливаются, т.е. голографическая процедура позволяет найти лишь сглаженный вариант поля на источнике.

Для уменьшения эффекта сглаживания можно проводить измерения на небольшом расстоянии от источника, где не все неоднородные волны успевают заметно затухнуть и поэтому могут быть измерены и использованы для нахождения поля на источнике (упомянутая выше голография ближнего поля [6]). К настоящему моменту существует ряд работ, в которых производилось исследование цилиндрических источников методом голографии ближнего поля. В работах [8, 11] были произведены исследования колебаний цилиндра в воде на частотах порядка 2 кГц, при этом особое внимание уделялось наличию неоднородных волн, с помощью которых возможно получение разрешающей способности, превосходящей стандартный дифракционный предел. В работах [12, 13] производилось исследование акустических источников в воздухе при наличии шума и непостоянства уровня излучения с использованием голографии ближнего поля в цилиндрических координатах в диапазоне частот 0.8–1.3 кГц.

При исследовании пьезоэлектрических источников, работающих на мегагерцовых частотах, проведение измерений на малых расстояниях от источника (порядка длины волны) обычно невозможно. Причиной тому являются неизбежные переотражения акустической волны между приемником и излучающей поверхностью. Кроме того, заметной может оказаться электромагнитная наводка от источника, маскирующая слабые акустические сигналы. Поэтому измерения приходится проводить на большом расстоянии от излучателя, что делает невозможным учет неоднородных волн. Впрочем, использующиеся на практике пьезоэлектрические источники мегагерцового диапазона обычно имеют большие волновые размеры, и роль неоднородных волн в создаваемых ими полях несущественна. Таким образом, голография без учета неоднородных волн является достаточно точным инструментом исследования источников.

Для рассматриваемых в настоящей работе источников цилиндрически расходящихся волн имеется важная специфика неоднородных волн, учет которой позволяет уменьшить эффект дифракционного сглаживания при проведении измерений на больших по сравнению с длиной волны расстояниях. Как уже отмечалось, комплексная амплитуда спектральной компоненты имеет вид $P_m(k_z; r) \sim H_m^{(1)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} r)$. При $k_z > k = \omega/c$

и она переходит в функцию Макдональда действительного аргумента $H_m^{(1)}(ikr) \sim K_m(kr)$, где $k = \sqrt{k_z^2 - k^2}$, т.е. волна становится экспоненциально спадающей: $K_1(\xi)|_{\xi \gg 1} \approx \sqrt{\pi/(2\xi)} \exp(-\xi)$. Таким образом, спектральные компоненты с волновым аксиальным числом $k_z > k$ описывают неоднородные волны, которые следует отбросить при проведении измерений на больших расстояниях от источника.

Однако условие $k_z \leq k$ недостаточно для того, чтобы соответствующая спектральная компонента имела вид распространяющейся волны. Действительно, в случае плоских источников компонента углового спектра является распространяющейся при $\sqrt{k_y^2 + k_z^2} \leq k$, где k_y и k_z – пространственные частоты в направлениях y и z на плоскости источника. По аналогии, в случае цилиндрических источников можно предположить существование похожего условия, в котором роль компоненты k_y должна играть компонента, соответствующая полярному углу: $k_\varphi = 2\pi/\lambda_\varphi$, где $\lambda_\varphi = 2\pi r/m$ – пространственный период возмущения на расстоянии r , соответствующий угловой компоненте с индексом m . Иначе говоря, эффективное волновое число

$$k_\varphi(r) = m/r, \quad (9)$$

а вместе с ним и условие, при котором волна является распространяющейся:

$$\sqrt{k_\varphi^2 + k_z^2} \leq k, \quad (10)$$

оказываются зависящими от расстояния.

Эта важная особенность поведения спектральных компонент на первый взгляд не очевидна. Действительно, если выполняется условие $k_z \leq k$, то аргумент функции Ханкеля в зависимости $P_m(k_z; r) \sim H_m^{(1)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} r)$ является действительным, т.е. волна вроде бы является распространяющейся. Кажущийся парадокс объясняется специфической структурой функций Ханкеля. Заметим, что функция Ханкеля выражается через функции Бесселя и Неймана: $H_m^{(1)}(\xi) = J_m(\xi) + iN_m(\xi)$. Каждая из входящих в это представление функций $J_m(\xi)$ и $N_m(\xi)$ является, в отличие от $H_m^{(1)}(\xi)$, действительной функцией и описывает стоячую цилиндрическую волну. Для функции Бесселя $J_m(\xi)$ известно, что при $\xi < m$ ее значение мало, т.е. соответствующее поле $\sim H_m^{(1)}(\xi) \approx iN_m(\xi)$ превращается в стоячую волну. Иначе говоря, при $\xi = \sqrt{k^2 - k_z^2} r < m$ волна переносит энергию лишь в пределах масштаба меньше длины волны, т.е. может считаться нераспространяющейся. Записи-

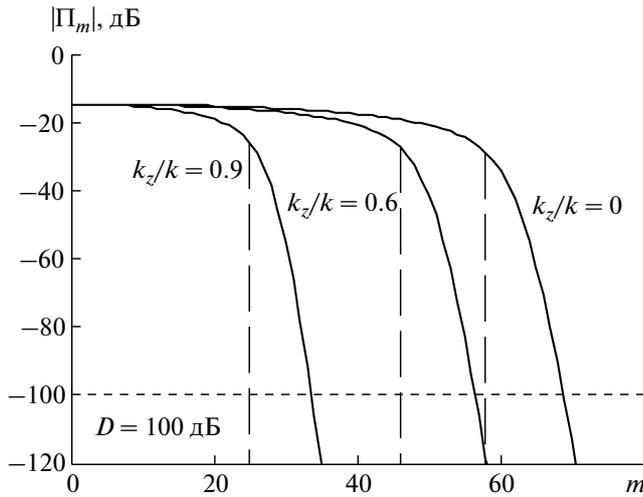


Рис. 2. Зависимость величины $20 \lg |\Pi_m|$ от m , где $\Pi_m(k_z; r_0, r_1)$ — пропегатор (5), для значений $r_0 = 9.25$ мм, $r_1 = 40$ мм, $f = 1.5$ МГц, и для $k_z/k = 0, 0.6$ и 0.9 . Вертикальные штриховые линии соответствуют значениям критического углового индекса $m_0(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2} r_0$, при превышении которого ($m > m_0$) волна на источнике является нераспространяющейся.

вая это условие в виде $\sqrt{k^2 - k_z^2} < m/r = k_\phi$, получим, что волна является нераспространяющейся при $\sqrt{k_\phi^2 + k_z^2} > k$, что совпадает с критерием (10), выписанным выше для распространяющейся волны по аналогии со случаем плоских источников. Как отмечено в работе [6], затухание упомянутых волн происходит приблизительно по степенному закону: $\Pi_m(k_z; r_0, r) \approx (r_0/r)^m$. Такая зависимость означает, что хотя затухание является довольно сильным (особенно для $m \gg 1$), спад не является экспоненциально быстрым, т.е. имеется возможность зарегистрировать сигнал вдали от источника.

Из формул (9) и (10) следует, что для цилиндрических источников не всегда можно провести четкое разграничение между распространяющимися и нераспространяющимися волнами (в отличие от того, как это делается в случае плоских источников). Имеется три типа волн: 1) заведомо распространяющиеся компоненты — те, для которых выполняется условие (10) на расстоянии r_0 , т.е. при $k_\phi = m/r_0$; 2) заведомо нераспространяющиеся компоненты — те, для которых $k_z > k$; 3) компоненты, которые на самом источнике и вплоть до расстояния $r = m/\sqrt{k^2 - k_z^2}$ являются нераспространяющимися, а затем начинают распространяться. Существование волн 3-го типа обусловлено тем, что в цилиндрически расходя-

щейся волне поперечный масштаб в направлении изменения полярного угла растет линейно с расстоянием, т.е. те неоднородности, которые изначально были малы по сравнению с длиной волны, рано или поздно начинают превосходить длину волны и поэтому перестают быстро затухать.

При построении голографического алгоритма дальнего поля по формуле (6) можно использовать волны 1-го типа, т.е. заведомо распространяющиеся спектральные компоненты. Такой выбор обеспечит устойчивость, но приведет к сглаживанию распределения давления на источнике как в направлении z , так и в направлении ϕ . Эффект сглаживания поля на источнике в направлении ϕ можно уменьшить, если использовать и те волны 3-го типа, которые превращаются в распространяющиеся до того, как успеют заметно затухнуть. Хотя измерения при этом могут проводиться на расстоянии многих длин волн от источника, для точности восстановления поля на источнике удастся превысить стандартный дифракционный предел, составляющий половину длины волны (так же как в голографии ближнего поля).

Критерий выбора нужного количества спектральных компонент 3-го типа зависит от точности измерений. В качестве примера рассмотрим цилиндрический источник радиуса $r_0 = 9.25$ мм и частотой $f = 1.5$ МГц. Пусть сбор голографической информации производится на цилиндре радиуса $r_1 = 40$ мм, а скорость звука в среде равна $c = 1.5$ мм/мкс. Такие параметры использовались в описанном ниже численном эксперименте. На рис. 2 построены зависимости модуля пропегатора (5) для нескольких значений отношения k_z/k . Значения критического углового индекса

$$m_0(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2} r_0, \quad (11)$$

при превышении которого ($m > m_0$) волна на источнике является затухающей, соответствуют вертикальной штриховой линии. Как видно, с ростом углового индекса пропегатор практически не ослабевает вплоть до m_0 , но начинающийся при дальнейшем росте m спад не является крутым, благодаря чему на поверхности $r = r_1$ можно зарегистрировать часть спектральных компонент с номерами $m > m_0$. Например, при $k_z/k = 0$ спад на 100 дБ происходит при $m \approx 1.17m_0$. Таким образом, при нахождении поля на источнике можно использовать большее количество угловых компонент и тем самым повысить пространственное разрешение.

Рассмотрим численный пример, иллюстрирующий особенности рассматриваемого алгоритма голографии. Пусть на исходном цилиндре радиуса $r_0 = 9.25$ мм давление отлично от нуля на половине цилиндра ($\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$) в пределах участка

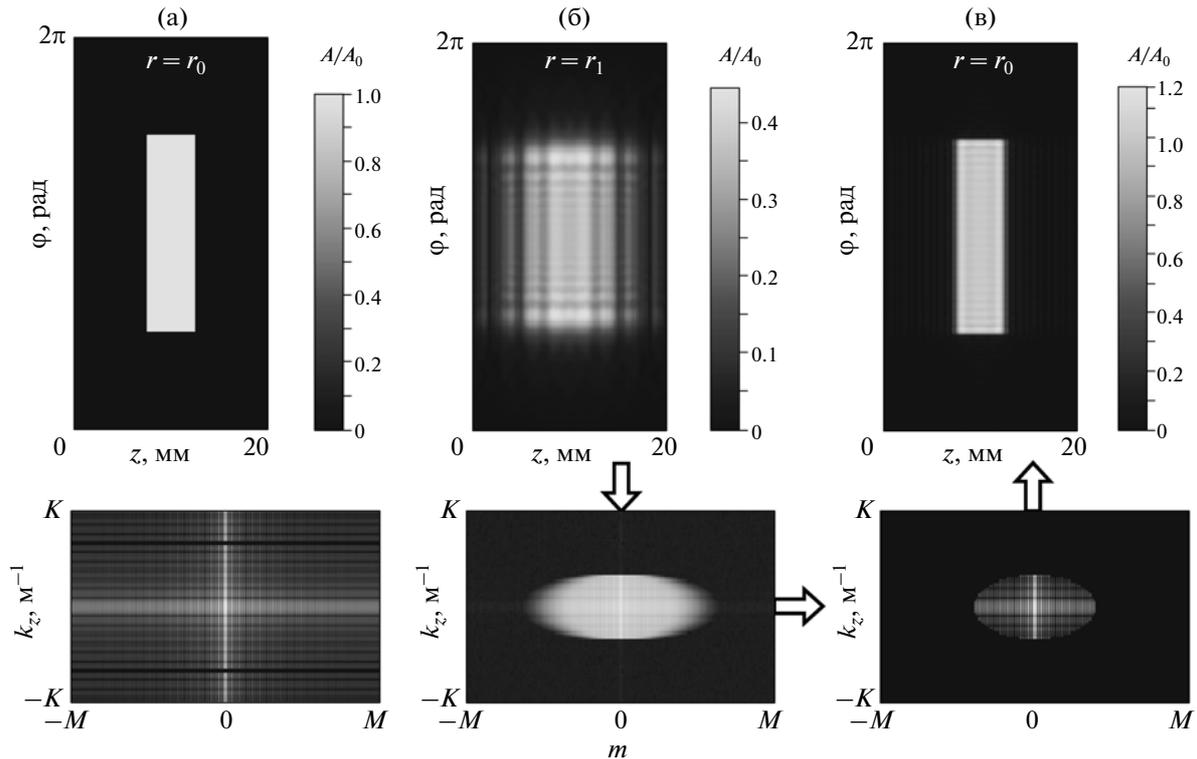


Рис. 3. Распределение амплитуды акустического давления (сверху) и соответствующий пространственный спектр в логарифмическом масштабе (внизу). Границы спектральной области: $K = 12.6 \times 10^3 \text{ м}^{-1}$, $M = 120$. (а) Исходные распределения на поверхности модельного цилиндрического излучателя радиуса $r_0 = 9.25 \text{ мм}$ и высотой $l = 20 \text{ мм}$ на частоте $f = 1.5 \text{ МГц}$. (б) Распределение давления и спектр на поверхности измерений $r_1 = 40 \text{ мм}$, (в) восстановленное распределение давления и спектр на поверхности излучателя.

высотой $l_0 = 6 \text{ мм}$ ($7 \text{ мм} \leq z \leq 13 \text{ мм}$) – см. рис. 3а. Частота излучения $f = 1.5 \text{ МГц}$. Пусть измерение амплитуды и фазы волны производится на цилиндре радиуса $r_1 = 40 \text{ мм}$ и высоты $l = 20 \text{ мм}$ ($0 \leq z \leq 20 \text{ мм}$). Измерения проводятся в узлах сетки с шагом (0.25 мм) меньше половины длины волны (0.5 мм).

Алгоритм расчета пояснен на рис. 3. На первом шаге по формуле (3) с использованием шага много меньшего длины волны на основе быстрого преобразования Фурье (БПФ) был вычислен пространственный спектр поля давления на источнике $P_m(k_z; r_0)$, см. рис. 3а, нижний рисунок. Затем по формулам (4)–(5) находилась пространственный спектр $P_m(k_z; r_1)$ на поверхности измерения $r = r_1$. На следующем шаге по формуле (2) вычислялись значения давления $p(r_1, \varphi, z)$ в узлах измерительной сетки. Это распределение моделировало данные гипотетического эксперимента (рис. 3б, вверху). Далее эти данные использовались для расчета пространственного спектра при $r = r_1$ на основе формулы (3), в которой интегралы приближенно заменялись суммами по методу прямоугольников. Рассчитывались лишь те спектральные компоненты, для которых затухание на

участке от $r = r_0$ до $r = r_1$ не слишком велико (т.е. либо только распространяющиеся волны, либо, в дополнение к ним, обсужденные волны смешанного типа). Амплитуды остальных компонент принимались равными нулю. Получившееся распределение показано на рис. 3б внизу. После этого по формуле (6) решалась обратная задача – находился пространственный спектр волны на источнике, т.е. при $r = r_0$ (рис. 3в, внизу). Далее по формуле (2), в которой интегрирование приближенно заменялось суммированием, вычислялось распределение давления на источнике (рис. 3в, вверху), которое сравнивалось с исходным значением $p(r_0, \varphi, z)$ (рис. 3а, вверху). По отклонению рассчитанного распределения от исходного можно было оценивать точность голографического восстановления и находить подходящие параметры измерительной сетки.

МЕТОД ОБРАТНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА ИНТЕГРАЛЕ РЭЛЕЯ

Указанный метод описывался нами ранее для исследования плоских и сферически фокусированных излучателей [2, 3], обладающих явно выраженной направленностью. Изложим кратко

суть метода. На некотором расстоянии от исследуемого акустического источника рассматривается охватывающая его поверхность Σ_H , акустическое давление на которой считается известным из эксперимента. Поля квазиплоских источников больших волновых размеров имеют вид ограниченных в поперечном направлении пучков, и поэтому на практике измерение достаточно проводить на участке поверхности напротив источника. Задача состоит в нахождении акустических характеристик на поверхности гармонического источника с помощью голограммы – измеренного на участке Σ_H распределения комплексной амплитуды акустического давления $p_H(\mathbf{r}')$, где \mathbf{r}' – координаты точек поверхности Σ_H . Принципиальная возможность этого следует из обратимости волнового уравнения во времени. Если поверхность Σ_H мысленно заменить зеркалом, обращающим время (в случае гармонических волн – обращаящим фазу), то отраженная от него волна будет распространяться назад и, дойдя до источника, в определенном смысле восстановит свои исходные характеристики. Амплитуда нормальной компоненты колебательной скорости в точке \mathbf{r} на поверхности источника $v(\mathbf{r})$ может быть рассчитана на основе амплитуды давления $p_H(\mathbf{r}')$ с использованием интеграла типа Рэлея [3]:

$$v(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma_H} p_H(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \quad (12)$$

с ядром:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2i\pi\omega\rho} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{n}'} \left(\frac{\exp\left[-i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r})$ – единичная внешняя нормаль к поверхности источника в точке восстановления \mathbf{r} , $\mathbf{n}' = \mathbf{n}'(\mathbf{r}')$ – единичная нормаль к элементу поверхности $dS' \in \Sigma_H$, ориентированная в направлении источника. Если обозначить $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ и $\mathbf{e}_R = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/R$, то после дифференцирования выражение для ядра (13) примет вид:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp\left[-i\frac{\omega}{c}R\right]}{i2\pi\omega\rho} \left[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \left(\frac{1}{R^3} + \frac{i\omega}{cR^2} \right) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_R) \cdot (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{e}_R) \left(\frac{3}{R^3} + \frac{3i\omega}{cR^2} - \frac{\omega^2}{c^2 R} \right) \right]. \quad (14)$$

Необходимо отметить, что описанный выше метод голографии является приближенным. Причиной тому является то принципиальное обстоятельство, что инвариантности волнового уравнения относительно изменения знака времени не-

достаточно для полного обращения волнового процесса во времени [14, 15]. При строгом расчете обратного распространения необходимо также сделать так, чтобы и граничные условия были обращены во времени, т.е. все источники стали равными по величине стоками. При расчете же волны по формуле (12) на поверхности излучателя никакие стоки не возникают. Вместо этого обратно распространяющейся (гипотетической) волне фактически дается возможность свободно пройти сквозь поверхность излучателя, что лишь приближенно заменяет расположенные там стоки, особенно если проводится голографическое восстановление малых по сравнению с длиной волны неоднородностей поля на излучателе. Как следствие, при расчете распределения поля на излучателе по формуле (12) происходит дифракционное сглаживание неоднородностей меньшей длины волны. В то же время для крупных неоднородностей поля на излучателе замена стоков “прозрачностью” поверхности вполне оправдана, что и объясняет высокую точность метода для квазиплоских источников больших волновых размеров.

В настоящей статье рассматриваются цилиндрические источники больших волновых размеров, для которых пространственная локализация поля имеется лишь в направлении вдоль оси цилиндра, а в плоскости, перпендикулярной оси, излучение является расходящимся во все стороны. В силу указанных особенностей в качестве поверхности измерений Σ_H для регистрации всего излучаемого поля приходится брать поверхность, по полярному углу охватывающую исследуемый источник со всех сторон. При расчете обратного распространения по формуле (12) от такой замкнутой по углу поверхности волна пересекает каждый элемент поверхности цилиндрического излучателя дважды – не только с внешней, но и с внутренней стороны, т.е. эффективно возникают не только нужные стоки, но и паразитные источники. Поэтому интеграл Рэлея (12) не позволяет провести корректное восстановление поля на поверхности излучателя.

Необходимую модификацию метода можно сделать исходя из рассмотрения предельного случая очень высоких частот, когда распространение волны происходит в соответствии в приближении геометрической акустики. В этом приближении при обратном распространении в заданную точку поверхности приходят волны не от всех элементов поверхности Σ_H , а лишь от тех, которые не заслоняются самим цилиндрическим излучателем. Остальные элементы поверхности Σ_H находятся в зоне акустической тени. Поэтому если их исключить при расчете по формуле (12), то упомянутые выше паразитные источники будут также исключены. В рамках такого подхода за основу голографии следует взять интеграл Рэлея (12), в

котором интегрирование производится не по всей поверхности измерения Σ_H , а лишь по той ее части $\sigma_H(\mathbf{r}) \in \Sigma_H$, которая видна из точки \mathbf{r} поверхности излучателя. Если поверхность излучателя – цилиндр радиуса r_0 , восстановление поля производится в точке с угловой координатой φ , а сбор голографической информации проведен на цилиндрической поверхности радиуса r_1 , то указанная поверхность σ_H соответствует диапазону изменения полярного угла $\varphi \pm \arccos(r_0/r_1)$. Формула (12) в указанном приближении принимает вид:

$$v(r_0, z, \varphi) = \int_{\varphi - \arccos(r_0/r_1)}^{\varphi + \arccos(r_0/r_1)} r_1 d\varphi' \times \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz' p_H(r_1, z', \varphi') K(z - z', \varphi - \varphi'). \quad (15)$$

Здесь z_{\min} и z_{\max} задают границы интервала изменения осевой координаты на области сканирования, а ядро (14) описывается следующим выражением:

$$K(\zeta, \psi) = \frac{i}{2\pi\rho c k R^2} \left[\cos\psi \left(\frac{1}{R} + ik \right) + (r_0 - r_1 \cos\psi)(r_1 - r_0 \cos\psi) \left(\frac{3}{R^3} + \frac{3ik}{R^2} - \frac{k^2}{R} \right) \right], \quad (16)$$

где $k = \omega/c$ – волновое число, $R = \sqrt{r_0^2 + r_1^2 - 2r_0r_1 \cos\psi + \zeta^2}$.

В эксперименте параметры акустической волны измеряются в конечном наборе точек поверхности Σ_H , поэтому при использовании выражения (15) интеграл следует аппроксимировать суммой. При использовании метода на практике при сборе голографической информации (т.е. при измерении амплитуды и фазы волны) чрезвычайно важным является выбор шага сканирования. При слишком большом шаге параметры поля на излучателе восстанавливаются с существенной ошибкой. Если выбрать шаг чрезмерно малым, чтобы с запасом гарантировать точность восстановления, то время сканирования может оказаться недопустимо большим (более нескольких часов). Естественно выбирать шаг сканирования исходя из требования, чтобы на величине шага измеряемое поле изменялось мало. Это требование заведомо выполняется при шаге в полдлины волны (соответствующий критерий является не чем иным, как критерием Найквиста, возникающим при анализе пространственного спектра). В случае цилиндрических источников на расстоянии много длин волн диаграмма направленности устанавливается, и поэтому масштаб изменения поля по

углу не изменяется, т.е. пространственный масштаб растет пропорционально расстоянию от источника. Поэтому линейный шаг в направлении изменения угла можно также увеличивать в соответствии с требуемым шагом по углу $\Delta\varphi = \lambda/(2r_0)$. Шаг сканирования вдоль оси источника желательно брать близким к половине длины волны. Более крупные шаги также могут оказаться достаточными, особенно если поверхность сканирования близка к фазовому фронту волны. Для нахождения максимально допустимого шага удобно проводить численное моделирование задач прямого и обратного распространения применительно к конкретному излучателю.

Результаты расчетов и сравнение предложенного метода голографии со спектральным методом описаны ниже.

ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проверки описанных методов голографии был проведен ряд экспериментов с цилиндрическими источниками, расположенными в воде. Ниже изложены результаты для двух источников, первый из которых анализировался с помощью спектрального метода голографии, а второй – с помощью метода интеграла Рэлея. Оба источника имели форму полого цилиндра и были изготовлены из радиально поляризованной ЦТС пьезокерамики.

Первый излучатель представлял собой цилиндр внешним диаметром 18.5 мм, толщиной 1 мм и высотой 20 мм. Внутренняя часть указанного керамического цилиндра была заполнена воздухом. Излучатель закреплялся на торце соосного с ним вертикально расположенного металлического стержня, который мог проворачиваться контролируемым образом вокруг оси и перемещаться вдоль оси с помощью системы микропозиционирования (Velmex UniSlide VP9000, США). Перед проведением экспериментов совпадение оси вращения и оси излучателя обеспечивалось с точностью до 0.05 мм путем предварительной установки и контроля зазора между поверхностью вращающегося цилиндра и неподвижным экраном с помощью набора калиброванных щупов. Для измерений давления был использован игольчатый гидрофон (SEA, PVDFZ44-0400) с предусилителем, с диаметром чувствительного участка 0.4 мм, также погруженный в воду и закрепленный на заданном расстоянии от источника. В процессе сканирования гидрофон был неподвижен, а цилиндрический источник поворачивался или перемещался в вертикальном направлении. Такое сканирование в системе координат источника было эквивалентно перемещению датчика вдоль цилиндрической поверхности, окружающей исследуемый источник. Напряжение на излучатель

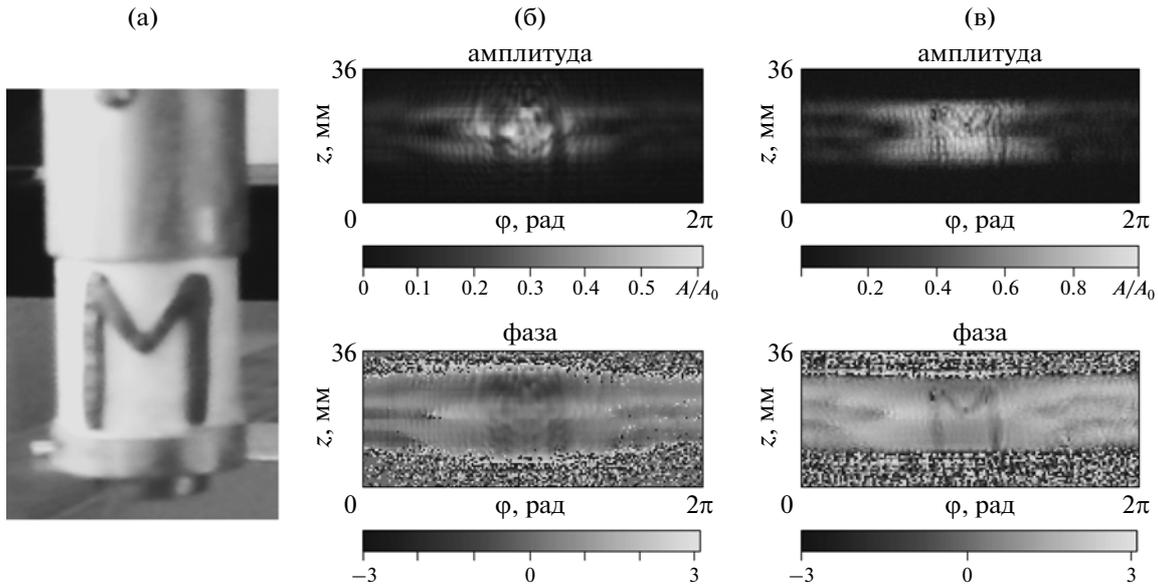


Рис. 4. (а) Фотография излучателя $r_1 = 9.25$ мм, $l = 20$ мм, $f = 1.528$ МГц, (б) распределение амплитуды и фазы давления на поверхности измерений $r_1 = 40$ мм, (в) восстановленное распределение амплитуды и фазы давления на поверхности излучателя.

подавалось с генератора (Hewlett Packard 33120A) в виде радиоимпульсов длительностью 50 мкс и с частотой заполнения 0.7–1.5 МГц (для разных излучателей). Частота следования импульсов составляла около 300 Гц. Сигнал с гидрофона поступал через усилитель на осциллограф (Tektronix TDS520A), после чего обрабатывался в компьютере. Для увеличения отношения сигнал/шум, которое определяет величину D , наряду с усилением сигнала, подававшегося на излучатель, производилось усреднение принимаемого сигнала по нескольким периодам (10–20) в пределах наблюдаемого временного окна и по времени (0.5–5 с) при фиксированной частоте развертки 300 Гц в каждой точке пространства. Путем увеличения времени усреднения можно достичь значений $D = 150$ дБ и выше, однако суммарное время измерений в этом случае для решетки сканирования 360×100 точек должно составлять несколько суток. В рабочем режиме с параметрами усреднения, при которых полное сканирование производилось за время 6–8 часов, величина D принимала значения от 60 до 100 дБ. Перемещение излучателя осуществлялось пошагово с помощью позиционной системы под управлением компьютера.

На рис. 4а представлен внешний вид излучателя с параметрами $r_0 = 9.25$ мм, $l = 20$ мм, $f = 1.528$ МГц, с наклеенной на излучающую поверхность буквой “М” из пластилина. На рис. 4б представлены распределения амплитуды (вверху) и фазы (внизу) акустического давления на цилиндрической поверхности радиуса $r_1 = 40$ мм. Измерения производились на сетке 360×80 то-

чек с шагом по углу в 1 градус, по направлению оси излучателя с шагом 0.5 мм. Измеренное поле содержит информацию о распределении акустического давления на поверхности излучателя, в том числе сильно размытый контур буквы “М”. На рис. 4в представлены распределения амплитуды и фазы акустического давления на поверхности цилиндрического источника, полученные с помощью описанного спектрального метода акустической голографии. При расчетах использовалось ограничение на пространственный спектр сигнала с использованием значения $D = 80$ дБ. Отчетливо видно, что характерные особенности распределения амплитуды и фазы давления хорошо повторяют форму наклеенной буквы “М”.

Обработка полученных данных для этого излучателя проводилась и с помощью метода интеграла Рэля. Картины распределения амплитуды и фазы давления на поверхности источника, полученные двумя методами, оказались практически неразличимыми. Поэтому здесь приведены лишь результаты, полученные методом углового спектра. Более подробное сравнение двух методов проведено в заключительном разделе статьи.

Второй цилиндрический источник имел высоту 6 мм и диаметр 2.7 мм. Толщина стенок цилиндра составляла 270 ± 25 мкм. Во внутренней полости цилиндра размещался акустический отражатель – стержень из латуни, отделенный от внутренней стенки цилиндра водяным зазором чуть меньше половины длины волны. Источник достигал наибольшей акустической мощности в полосе частот около 9.0 ± 0.25 МГц. Он размещал-

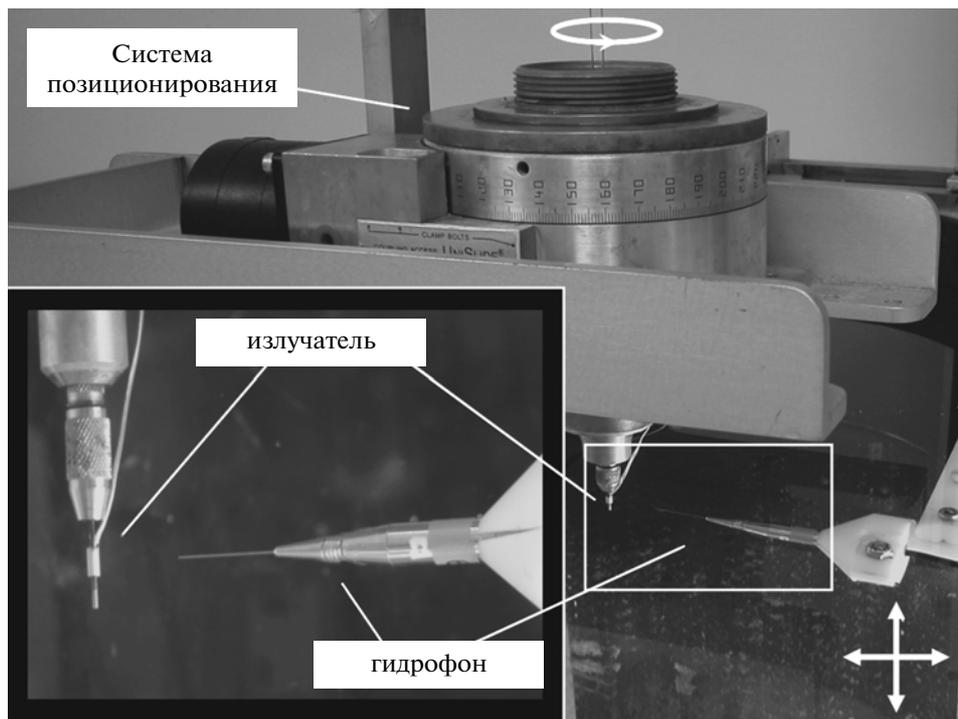


Рис. 5. Фотография установки для сканирования цилиндрических излучателей. Игольчатый гидрофон может перемещаться системой микропозиционирования, а излучатель поворачиваться вокруг своей оси. Источник и приемник находятся в баке с водой.

ся на наконечнике внутрисосудистого катетера, предназначенного для минимально инвазивного воздействия на сердечные ткани при лечении симптомов аритмии предсердий [16].

Так же как и в случае первого излучателя, ультразвуковое поле измерялось в импульсно-периодическом режиме. Использовалась микропозиционная установка по контролю за качеством излучателей (ProRhythm Inc, США), показанная на рис. 5. Наконечник катетера с расположенным на нем цилиндрическим излучателем поворачивался вокруг своей оси, а гидрофон мог независимо перемещаться в осевом (вертикальном) направлении. Это позволяло производить измерения акустического давления в произвольных точках соосной с излучателем цилиндрической поверхности. И поворот излучателя, и перемещение гидрофона осуществлялись автоматически с помощью управляемых компьютером шаговых двигателей системы микропозиционирования. Электрические импульсы длительностью 5–10 мкс создавались генератором (HP 33120A, Agilent Technologies Inc, США), усиливались (усилитель Communication Power Corporation, Наурпауге, NY, США) и подавались на излучатель. Средняя электрическая мощность не превышала 30 Вт при частоте повторения импульсов 1 кГц. Каждый излученный акустический сигнал принимался миниатюрным игольчатым гидрофоном

с диаметром чувствительного участка 40 мкм (Precision Acoustics Ltd, Dorchester, Великобритания). Электрический сигнал гидрофона подавался на вход осциллографа (HP 54615B, Agilent Technologies Inc, США), где в заданном окне постоянная по амплитуде часть сигнала усреднялась. Соответствующий временной участок считывался в компьютер, и с использованием преобразования Гильберта рассчитывались амплитуда и сдвиг по фазе измеренного акустического давления относительно заданного реперного сигнала той же несущей частоты.

Восстановление распределения нормальной компоненты скорости на поверхности излучателя производилось методом голографии с использованием интеграла Рэля по формулам (15)–(16). Отметим, что поскольку частота источника была сравнительно велика, размер анализируемых неоднородностей был много больше длины волны, т.е. не было необходимости в улучшении разрешения с использованием неоднородных волн. Поэтому при анализе данных метод углового спектра не использовался (в отличие от предыдущего эксперимента). Результаты при проведении измерений на расстояниях от 10 мм до 60 мм совпали и оказались мало зависящими от точности юстировки системы. Ниже приведены результаты для сканирования на частоте 9 МГц на расстоянии $r_1 = 20$ мм. Вертикальное сканирование проводи-

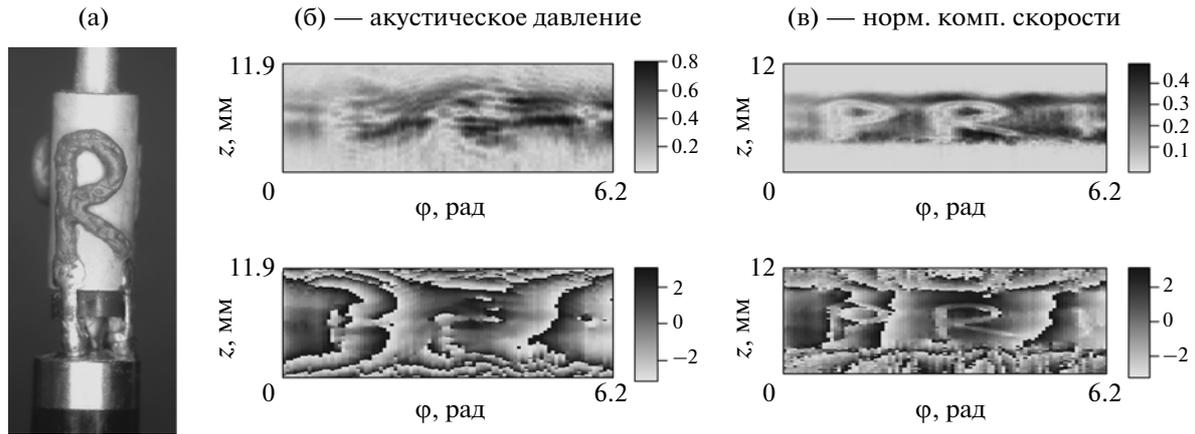


Рис. 6. (а) Фотография излучателя. (б) Распределение амплитуды (вверху) и фазы (внизу) акустического давления на поверхности измерений $r_1 = 20$ мм. (в) Восстановленное распределение амплитуды и фазы давления на поверхности излучателя $r_0 = 1.35$ мм. Шкалы для амплитуд акустического давления и скорости приведены, соответственно, в МПа и м/с.

лось в пределах 12 мм (т.е. на интервале в 2 раза большем высоты источника) с шагом 0.1 мм, что несколько меньше длины волны в воде $\lambda = 0.167$ мм. Сканирование вдоль одной вертикальной линии занимало около минуты, а общее время сканирования, пропорциональное количеству шагов по углу, составляло от одного часа (60 шагов по 6 градусам) до нескольких часов. Заметим, что масштаб в одну длины волны, приведенный к поверхности источника, соответствует примерно 7 градусам.

На рис. 6а представлен внешний вид излучателя. На поверхность излучателя нанесена поглощающая полоска из воска в форме латинских букв “PRI”. Аналогично рис. 4б и 4в, распределения амплитуды (вверху) и относительной фазы (внизу) показаны на рис. 6б, а распределения нормальной компоненты колебательной скорости на поверхности излучателя показаны на рис. 6в. В отличие от предыдущего эксперимента, распределения скоростей в данном случае были получены методом обратного распространения на основе интеграла Релея (15). Контуры букв “PRI” четко распознаются в восстановленном распределении скоростей на рис. 6в, но малоразличимы в распределении амплитуды и сдвига фаз на поверхности измерения (рис. 6б). Простота и устойчивость метода позволила накопить значительный опыт голографической визуализации различных дефектов поверхности, припоя, трещин и других неоднородностей и с течением времени выработать надежную систему контроля за качеством производимых излучателей в их конечной стадии.

ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Излучение цилиндрических источников расходитесь во все стороны от оси источника. Эту особенность следует учитывать при формулировке различных методов акустической голографии.

В частности, если при использовании метода пространственного спектра действовать по аналогии со случаем плоских источников, то голография может оказаться либо невозможной, либо недостаточно точной. Это в первую очередь касается выбора максимального углового индекса m , удерживаемого в разложении по пространственным гармоникам (2). Если использовать все возможные спектральные компоненты, являющиеся распространяющимися волнами на поверхности сканирования, то при расчете обратного распространения возникнет неустойчивость. Это связано с тем, что при приближении к источнику некоторые из удержанных компонент пространственного спектра превращаются в быстро затухающие (“неоднородные”) волны, и задача обратного распространения таких волн становится некорректной. Алгоритм обратного распространения будет заведомо устойчивым, если максимальный угловой индекс выбрать так, чтобы все удерживаемые спектральные компоненты являлись распространяющимися на самом источнике. Однако в этом случае не будет достигнута предельно возможная точность, поскольку при указанной отсечке не используется информативная высокочастотная часть пространственного спектра, которая соответствует волнам переходного типа — тем, которые поначалу являются неоднородными, но на некотором расстоянии от источника меняют свой тип и начинают распространяться без затухания. Оптимальная частота отсечки, тем

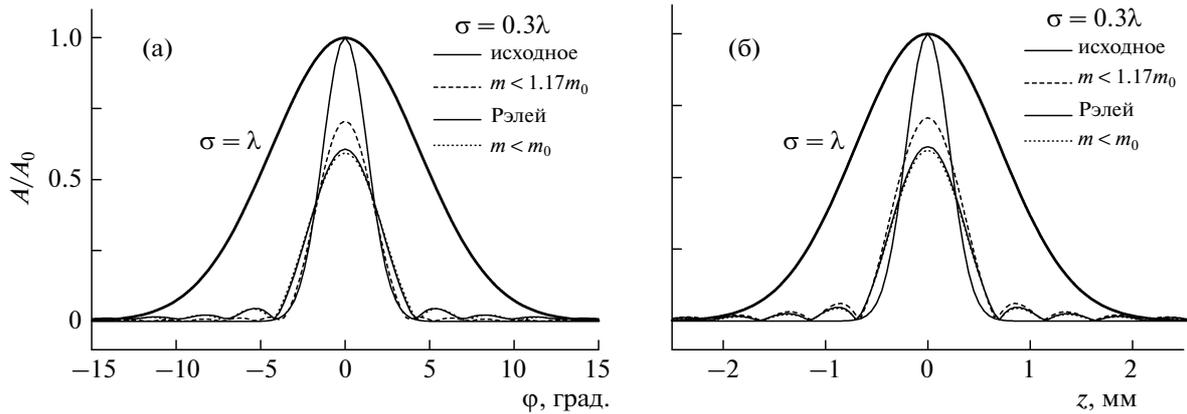


Рис. 7. Распределение давления на поверхности цилиндрического излучателя радиуса $r_1 = 9.25$ мм в угловом (а) и осевом (б) направлениях. Исходное распределение задано распределением Гаусса $\exp[-(z^2 + r^2\varphi^2)/\sigma^2]$ для $\sigma = 0.3\lambda$ и $\sigma = \lambda$ при $\lambda = 1$ мм. Приведено исходное распределение и результаты восстановления с поверхности измерений $r_1 = 40$ мм методом интеграла Рэля и спектральным методом при $m < m_0$ и $m < 1.17m_0$. Для $\sigma = 0.3\lambda$ кривые восстановления заметно отличаются, а для $\sigma = \lambda$ все кривые сливаются и совпадают с исходным распределением.

самым, лежит между двумя указанными характеристическими частотами.

В методе акустической голографии цилиндрических источников, основанном на использовании интеграла Рэля, также имеется специфика по сравнению со случаем плоских источников. Она заключается в том, что при расчете обратного распространения интегрирование проводится не по всей поверхности измерений, охватывающий источник, а лишь по той ее части, которая видна из исследуемой точки источника.

Пространственное разрешение всех описанных выше методов голографии ограничено дифракцией. На практике это означает, что при голографическом восстановлении мелкомасштабные неоднородности поля теряются, т.е. происходит сглаживание. Вполне закономерен вопрос, до какой степени эффект дифракционного сглаживания искажает истинное поле на источнике при использовании различных методов голографии. Качественно ответ на этот вопрос очевиден: сглаживание должно проявляться для неоднородностей порядка длины волны и меньше. Для количественного описания требуется проводить моделирование обратного распространения.

Удобно рассмотреть неоднородность в виде малого активного участка на поверхности цилиндрического излучателя. Рассмотрим случай гауссовского профиля акустического давления $\sim \exp[-(z^2 + r^2\varphi^2)/\sigma^2]$ по осевой и по угловой координатам. Здесь σ – характерный диаметр активного участка. На рис. 7 приведены исходные гауссовские распределения и результат их восстановления при использовании разных голографических подходов для случаев $\sigma = \lambda$ и $\sigma = 0.3\lambda$; параметры цилиндрического излучателя указаны в

подрисуночной подписи. Слева показаны распределения по углу, справа – по аксиальной координате. Расчет проводился методом интеграла Рэля, а также методом пространственного спектра при использовании заведомо распространяющихся компонент ($m \leq m_0$) и при дополнительном учете волн переходного типа ($m \leq 1.17m_0$). Примечательно, что при размере неоднородности, равном длине волны ($\sigma = \lambda$), все методы голографии дают практически идеальное восстановление. Как видно на рис. 7, все соответствующие кривые сливаются с исходным распределением. Таким образом, уже начиная с неоднородностей размером в длину волны любой из рассмотренных методов может считаться точным. Дифракционные особенности проявляются лишь для более мелких неоднородностей. Это видно из сравнения кривых при $\sigma = 0.3\lambda$. Все методы дают некоторую ошибку при восстановлении. Наиболее точно восстановление происходит при использовании метода пространственного спектра с удержанием компонент переходного типа ($m \leq 1.17m_0$). Метод пространственного спектра с использованием заведомо распространяющихся компонент и метод интеграла Рэля дают практически одинаковые распределения. Иначе говоря, на практике с равным основанием можно использовать и тот, и другой вариант акустической голографии. Важно, что все они позволяют найти распределение поля на источнике с высокой точностью, которая ограничивается лишь эффектом сглаживания неоднородностей, меньших длины волны.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 08-02-00368-а, ISTC 3691, NIH R01EB007643 и НШ-4590.2010.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cathignol D., Sapozhnikov O.A., Zhang J.* Lamb waves in piezoelectric focused radiator as a reason for discrepancy between O'Neil's formula and experiment // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1997. V. 101. (3). P. 1286–1297.
2. *Sapozhnikov O.A., Morozov A.V., Cathignol D.* Piezoelectric transducer surface vibration characterization using acoustic holography and laser vibrometry // *Proc. IEEE Int. Ultrason. and UFFC 50th Anniv. Joint Conf.* 2004. P. 161–164.
3. *Сапожников О.А., Пищальников Ю.А., Морозов А.В.* Восстановление распределения нормальной скорости на поверхности ультразвукового излучателя на основе распределения акустического давления вдоль контрольной плоскости // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49. № 3. С. 416–424.
4. *Сапожников О.А., Пономарев А.Е., Смагин М.А.* Нестационарная акустическая голография для реконструкции скорости поверхности акустических излучателей // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 3. С. 385–392.
5. *Синельников Е.Д., Филд Т., Сапожников О.А.* Закономерности формирования зоны термического разрушения при лечении фибрилляции предсердий катетерным методом ультразвуковой абляции // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 4–5. С. 641–652.
6. *Williams E.G.* Fourier acoustics: Sound radiation and nearfield acoustical holography // Academic Press, London, 1999.
7. *Williams E.G., Maynard J.D.* Holographic imaging without the wavelength resolution limit // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. P. 554–557.
8. *Williams E.G., Dardy H.D., Washburn K.B.* Generalized nearfield acoustical holography for cylindrical geometry: Theory and experiment // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1987. V. 81. (2). P. 389–407.
9. *Алексеев В.К., Лепендин Л.Ф.* Акустическое поле пульсирующего кольца на цилиндре // *Акуст. журн.* 1967. Т. 14. № 4. С. 126.
10. *Zeng X., McGough R.J.* Evaluation of the angular spectrum approach for simulations of near-field pressures // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 123 (1). P. 68–76.
11. *Williams E.G., Houston B.H., Bucaro J.A.* Broadband nearfield acoustical holography for vibrating cylinders // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1989. V. 86(2). P. 674–679.
12. *Lee M., Bolton J.S.* Patch near-field acoustical holography in cylindrical geometry // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2005. V. 118 (6) P. 3721–3732.
13. *Lee M., Bolton J.S.* Scan-based near-field acoustical holography and partial field decomposition in the presence of noise and source level variation // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2006. V. 119 (1). P. 382–393.
14. *Fink M.* Phase conjugation and time reversal in acoustics. In “Nonlinear Acoustics at the Turn of the Millennium: ISNA15”, ed. by W. Lauterborn and T. Kurz / Amer. Inst. Physics / 2000. P. 33–44.
15. *Зверев В.А.* Принцип акустического обращения волн и голография // *Акуст. журн.* 2004. Т. 50. № 6. С. 685–693.
16. *Sinelnikov Y., Vedernikov A., Sapozhnikov O.* The characterization of the cylindrical therapeutic transducers using time reversed acoustic holography // *UIA 2007 Symposium Abstracts*, p. 11.