

Метод численного расчета генерации ультразвуковых волн разностной частоты в условиях формирования ударного фронта

М. С. Сергеева,^{*} А. В. Тюрина,[†] П. В. Юлдашев,[‡] В. А. Хохлова[§]

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Поступила в редакцию 20.05.2022; подписана в печать 09.06.2022)

На основе нелинейного уравнения Бюргерса рассмотрена задача о генерации волны разностной частоты при взаимодействии двух интенсивных высокочастотных волн накачки. В режимах формирования ударных фронтов в профиле волны вычисление нелинейного оператора в этом уравнении представляет собой особую сложность из-за необходимости использования нескольких тысяч спектральных компонент, поэтому в работе исследован метод прореживания спектра, который позволяет существенно сократить количество гармоник, но при этом сохраняет достаточно высокую точность вычисления поля волны разностной частоты. Проведено сравнение нового метода с предложенным ранее для различного количества оставляемых в нелинейном алгоритме спектральных компонент. Показано, что новый метод удерживает меньшее число высокочастотных и большее число комбинационных компонент спектра, поэтому более точен на расстояниях до формирования ударного фронта, а на больших расстояниях дает выигрыш только при большом количестве оставляемых в алгоритме гармоник.

PACS: 43.25.+y, 43.25.-x. УДК: 534.23.

Ключевые слова: нелинейность, параметрический излучатель, разностная частота, уравнение Бюргерса, спектральный метод.

ВВЕДЕНИЕ

Параметрические излучатели, принцип работы которых основан на использовании эффектов нелинейной акустики, находят применение в различных приложениях подводных исследований [1, 2] и в воздушной акустике [3, 4]. В подводной среде с помощью параметрических излучателей генерируется низкочастотный сигнал, который способен распространяться на дальние расстояния и используется для акустической томографии вод, а также для зондирования дна океана. В воздухе, когда важна высокая направленность пучка слышимого звука и неразличимость человеческим ухом первичных сигналов, параметрические громкоговорители удобны при использовании в библиотеках или музеях, где информация предназначена только для одного конкретного слушателя.

В основе работы параметрического излучателя лежит нелинейное взаимодействие в среде двух первичных интенсивных высокочастотных волн. Если первоначально распространяются две волны с частотами накачки f_1 и f_2 , то в результате их нелинейного взаимодействия генерируются акустические волны на удвоенных $2f_1$ и $2f_2$, суммарной $f_1 + f_2$ и разностной $|f_1 - f_2|$ частотах, которые затем участвуют в процессах образования множества новых спектральных компонент. Из-за наличия в среде поглощения, квадратично возрастающего с увеличением частоты, высокочастотные

волны быстро затухают, и в некоторый момент в среде остается только акустическая волна наименьшей, т.е. разностной, частоты $f_{\text{dif}} = |f_1 - f_2|$ [5]. Параметрическая генерация волны разностной частоты, помимо увеличения дальности распространения сигнала, имеет ряд других важных преимуществ: высокую направленность такого излучения, составляющую всего лишь несколько градусов, его широкополосность, подавление боковых лепестков диаграммы направленности, а также возможность использования излучателей небольших размеров [6].

Полная нелинейно-дифракционная задача о генерации волны разностной частоты обычно описывается с помощью уравнения Вестервельта [5]. Уравнение решается численно, например, методом расщепления по физическим факторам [7], когда на каждом шаге по продольной координате распространения волны операторы нелинейности, поглощения и дифракции в правой части уравнения рассчитываются отдельно с использованием оптимальных численных схем для каждого оператора. В случае образования ударного фронта в профиле волны основную сложность в численном моделировании представляет вычисление нелинейного оператора в силу необходимости использования порядка тысячи спектральных компонент для корректного описания распространения нелинейной гармонической волны и нескольких тысяч — при двухчастотном взаимодействии. Так как количество операций при этом пропорционально квадрату числа гармоник [8], это сильно затрудняет вычисления, особенно при решении трехмерной в пространстве нелинейно-дифракционной задачи. Поэтому в работе исследовался процесс нелинейной генерации волны разностной частоты на основе одномерного уравнения Бюргер-

^{*} s_masha_ss@mail.ru

[†] tiurina.av@physics.msu.ru

[‡] petr@acs366.phys.msu.ru

[§] vera@acs366.phys.msu.ru

са [9, 10], которое решалось в спектральном представлении, и рассматривались возможности оптимизации нелинейного алгоритма.

Идея оптимизации состоит в том, чтобы учитывать только те спектральные компоненты, которые играют наибольшую роль в формировании сигнала на разностной частоте, и оставить их в численной схеме. Такой подход был предложен ранее в работе [10], где на некотором расстоянии проводилось прореживание спектра волны так, чтобы в нелинейном алгоритме оставались только высокоамплитудные гармоники, при этом ограничивалась высокочастотная часть спектра и прореживались комбинационные частоты. В данной работе предложен и проанализирован другой метод прореживания спектра, основанный на отборе пар соседних спектральных компонент, вносящих наибольший вклад в амплитуду волны разностной частоты, которые в дальнейшем использовались в алгоритме.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

1.1. Нелинейное уравнение Бюргерса

В приближении плоских волн, не учитывающем дифракцию, генерация акустической волны разностной частоты описывается одномерным нелинейным уравнением Бюргерса [9, 10]:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p^2}{\partial \tau} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}. \quad (1)$$

Здесь p — акустическое давление, z — выделенное направление вдоль оси пучка, $\tau = t - z/c_0$ — время в бегущей системе координат, c_0 — скорость звука, ρ_0 — плотность среды, β и δ — коэффициенты нелинейности и термовязкого поглощения. В качестве параметров, входящих в уравнение (1), использовались данные недавних исследований работы подводной параметрической антенны: $c_0 = 1502.25$ м/с, $\rho_0 = 996.81$ кг/м³ [10, 11] и характерные для морской воды коэффициенты нелинейности и поглощения: $\beta = 3.5$, $\delta = 4.42 \times 10^{-6}$ м²/с [12].

Граничное условие для уравнения (1) в случае двухчастотного взаимодействия волн накачки с частотами f_1 и f_2 записывается в виде:

$$p(\tau, z = 0) = \frac{p_0}{2} \sin(\omega_1 \tau) + \frac{p_0}{2} \sin(\omega_2 \tau), \quad (2)$$

где p_0 — максимальное акустическое давление в исходном волновом профиле, а $\omega_1 = 2\pi f_1$ и $\omega_2 = 2\pi f_2$ — циклические частоты. Пример одного периода нормированного на p_0 профиля давления приведен на рис. 1 для частот накачки $f_1 = 150$ кГц и $f_2 = 145$ кГц и начального давления $p_0 = 0.6$ МПа [10, 11]. При этом характерная длина образования разрыва для периода с максимальной амплитудой p_0 составляла $l_{sh} = \rho_0 c_0^3 / (\beta \omega_1 p_0) = 1.7$ м.

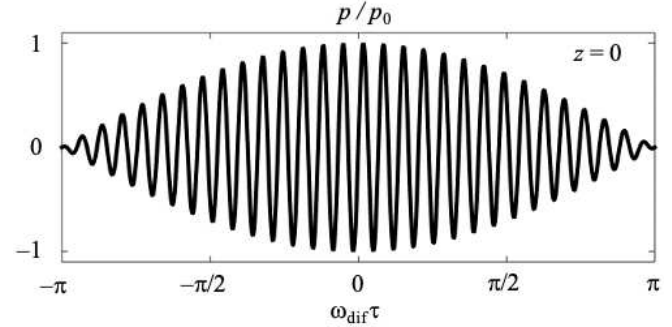


Рис. 1. Один период начального волнового профиля при $z = 0$

1.2. Численный алгоритм

Для решения уравнения Бюргерса использовался спектральный подход [8, 10], согласно которому поле давления $p(z, \tau)$ представляется в виде ряда Фурье, записанного для N_{\max} временных гармоник:

$$p(z, \tau) = \sum_{n=-N_{\max}}^{N_{\max}} P_n(z) e^{in\omega_{\text{dif}} \tau},$$

при этом уравнение (1) переходит в систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial z} = & \frac{in\beta\omega_{\text{dif}}}{c_0^3\rho_0} \left(\sum_{m=1}^{N_{\max}-n} P_m^* P_{m+n} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} P_m P_{n-m} \right) - \\ & - \frac{\delta n^2 \omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} P_n, \quad (3) \end{aligned}$$

где $1 \leq n \leq N_{\max}$, P_m^* — комплексно-сопряженная амплитуда m -ой гармоники.

Система уравнений (3) решалась численно методом расщепления по физическим факторам в виде $p(\tau, z + \Delta z) = L_{A, \Delta z/2} L_{N, \Delta z} L_{A, \Delta z/2}$, при этом в начале и в конце каждого шага по z для оператора поглощения $L_{A, \Delta z/2}$ использовалось аналитическое решение в виде затухающей экспоненты, а нелинейный оператор $L_{N, \Delta z}$ рассчитывался методом Рунге–Кутты 4 порядка точности.

При моделировании распространения нелинейной гармонической волны использовалось 250 гармоник частоты накачки f_1 . Чтобы обеспечить устойчивость численной схемы при выбранном количестве гармоник, коэффициент поглощения δ был искусственно увеличен примерно в 10 раз, что оказывает влияние только на структуру ударного фронта в решении уравнения Бюргерса, но не приводит к существенным отличиям в плавной части профиля волны [10]. Таким образом, для описания двухчастотного взаимодействия волн с граничным условием (2) в виде:

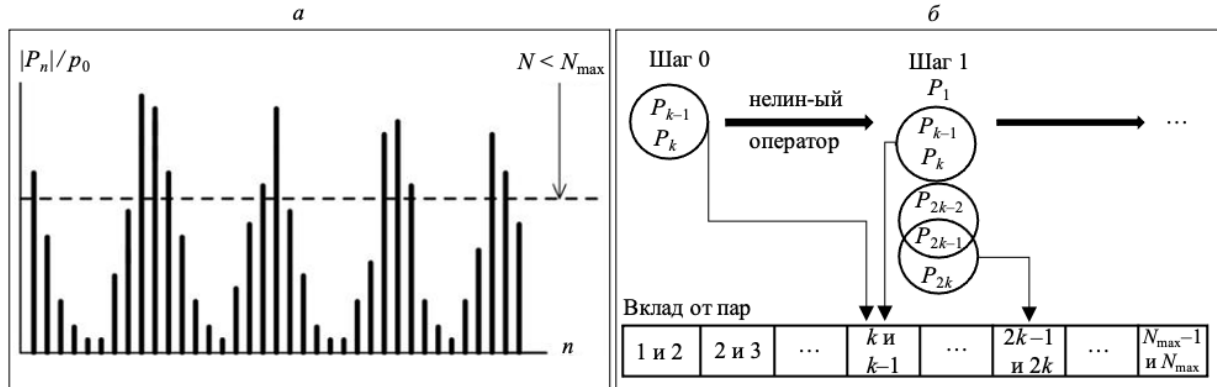


Рис. 2. Иллюстрации к методам прореживания спектра: а — пороговый метод, б — новый метод

$P_{29,0} = P_{30,0} = -0.25i p_0$ для выбранных частот $f_1 = 150$ кГц и $f_2 = 145$ кГц необходимо учитывать $N_{\max} = 7500$ гармоник разностной частоты $f_{\text{dif}} = 5$ кГц, что представляется трудно реализуемым при моделировании нелинейно-дифракционных задач ввиду квадратичного роста числа операций при расчете нелинейного оператора в зависимости от N_{\max} [8], поэтому необходима оптимизация вычислений нелинейной задачи.

1.3. Два метода прореживания спектра

Для упрощения вычислений ранее был предложен метод прореживания спектра [10], который позволяет сократить количество гармоник при расчете нелинейного оператора, однако сохраняет достаточную точность вычисления поля волны разностной частоты. В этом методе осуществлялось ограничение высокочастотной части спектра и прореживание низкоамплитудных комбинационных частот, расположенных между кратными исходным волнам накачки компонентами. Чтобы определить номера гармоник с наибольшими амплитудами, на некотором расстоянии z вводилось пороговое давление p_{th} , отсекающее гармоники с меньшей амплитудой (кроме компоненты на разностной частоте) таким образом, чтобы в оптимизированном алгоритме присутствовало заранее заданное число гармоник N , меньшее, чем в полном решении. Иллюстрация к данному методу приведена на рис. 2, а.

В данной работе реализована другая идея метода прореживания спектра. Согласно выражению (3), вклад в генерацию волны разностной частоты вносят пары гармоник, номера которых отличаются на 1. Чтобы оценить, какие пары вносят наибольший вклад в амплитуду волны разностной частоты, в расчетах с полным числом спектральных компонент ($N_{\max} = 7500$) на каждом шаге численного алгоритма отдельно рассчитывался вклад от каждой пары и прибавлялся к уже внесенным той же парой на предыдущих шагах (рис. 2, б). В дальнейшем вклады от всех пар гармоник

сортировались в порядке уменьшения, и из полученного списка выбиралось определенное количество спектральных компонент, по которым в нелинейном алгоритме (3) и проводились вычисления.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Предложенный ранее пороговый метод [10] позволил оставить в системе (3) для выбранных частот волн накачки всего лишь $N = 25$ гармоник вместо $N_{\max} = 7500$ при проведении процедуры прореживания на расстоянии трех длин образования разрыва с ошибкой в вычислении амплитуды волны разностной частоты относительно полного расчета при $N = N_{\max}$ менее 3% вплоть до десяти длин образования разрыва. Поэтому, в первую очередь, было важно понять, насколько новый метод превосходит или уступает предыдущему при том же количестве оставляемых в системе (3) гармоник $N = 25$.

На рис. 3, а представлены зависимости амплитуды волны разностной частоты $|P_{\text{dif}}|/p_0$ от расстояния, рассчитанные с учетом полного числа гармоник $N_{\max} = 7500$ (серая линия) и в результате прореживания спектра двумя различными методами (черная линия — предыдущий пороговый метод, красная — новый метод), а на вкладке приведены графики зависимостей ошибок обоих методов относительно полного решения. Видно, что на расстояниях меньше двух длин образования разрыва новый метод немного точнее предыдущего, однако на больших дистанциях он существенно уступает ему в точности, при этом максимальная ошибка превышает 15%. Отметим, что длина образования разрыва вводится для периода с максимальной амплитудой (рис. 1), поэтому даже на расстоянии двух длин образования разрыва большая часть периодов профиля волны не содержит ударного фронта.

Такое поведение можно объяснить с помощью рис. 3, б, на котором приведена гистограмма оставляемых в нелинейном алгоритме гармоник, отобранных двумя методами. Красным цветом обозначены остав-

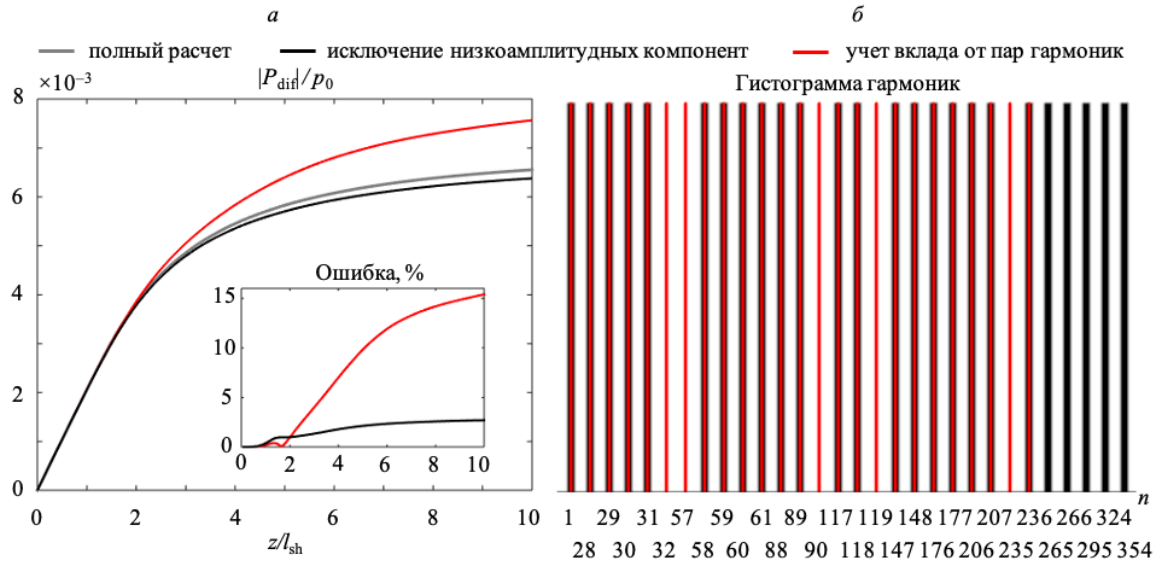


Рис. 3. Результаты прореживания спектра для $N = 25$ оставляемых в алгоритме гармоник двумя методами: *a* — зависимость амплитуды $|P_{diff}|/P_0$ волны разностной частоты от безразмерного расстояния z/l_{sh} с представленным на вкладке графиком ошибок двух методов, *б* — гистограммы оставляемых в нелинейном алгоритме гармоник двумя методами

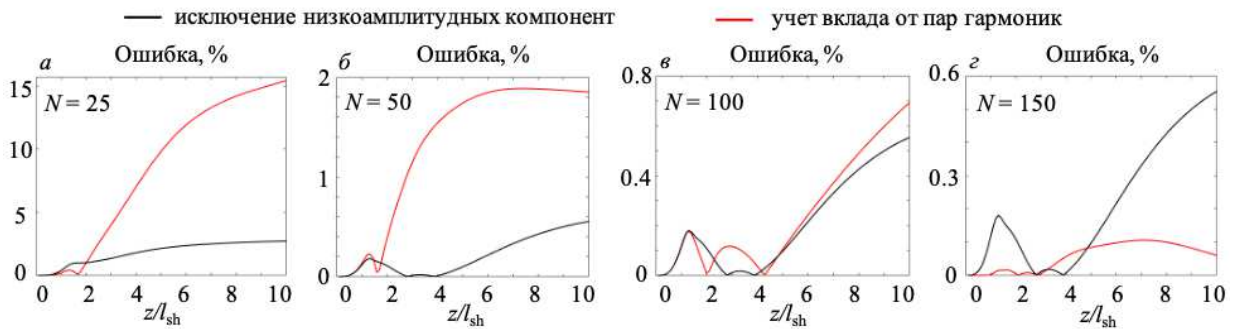


Рис. 4. *a-г* — Графики зависимостей ошибок двух методов от безразмерного расстояния z/l_{sh} для различного количества оставляемых в алгоритме гармоник N

ляемые в алгоритме спектральные компоненты согласно новому методу, а черным — предложенному ранее. Как видно из рисунка, в новом методе остается больше комбинационных частот и заметно меньше высоких частот. На малых расстояниях отсутствие высокочастотной части спектра не так критично влияет на точность вычисления амплитуды волны разностной частоты, и наличие большего числа комбинационных частот делает новый метод более точным, однако при увеличении расстояния z и формировании ударных фронтов в профиле волны отсутствие высокочастотных компонент сильно сказывается на точности предложенного в работе метода.

Далее число оставляемых в нелинейном алгоритме спектральных компонент последовательно увеличивалось с $N = 25$ до 150. На рис. 4 приведены графики зависимостей ошибок обоих методов относительно полного расчета для различного числа оставляемых в алгоритме гармоник $N = 25$ (рис. 4, *a*), 50

(рис. 4, *б*), 100 (рис. 4, *в*) и 150 (рис. 4, *г*), при этом черной линией изображен пороговый метод [10], а красной — новый. Из рис. 4 видно, что, оставаясь более точным на малых расстояниях, новый метод существенно проигрывает по точности предыдущему на больших расстояниях вплоть до количества оставляемых гармоник $N = 100$ (рис. 4, *в*). При дальнейшем увеличении числа гармоник до $N = 150$, новый метод становится более точным, максимальная ошибка при рассмотрении на расстояниях до десяти длин образования разрыва составляет порядка 0.1% для нового и 0.6% для старого метода.

Такая немонотонная зависимость точности методов объясняется тем, что с увеличением числа оставляемых в численном алгоритме гармоник увеличивается высокочастотная часть спектра, при этом в новом методе по-прежнему остается меньше ВЧ компонент и больше комбинационных. Однако на рассматриваемом диапазоне расстояний этого числа высокочастот-

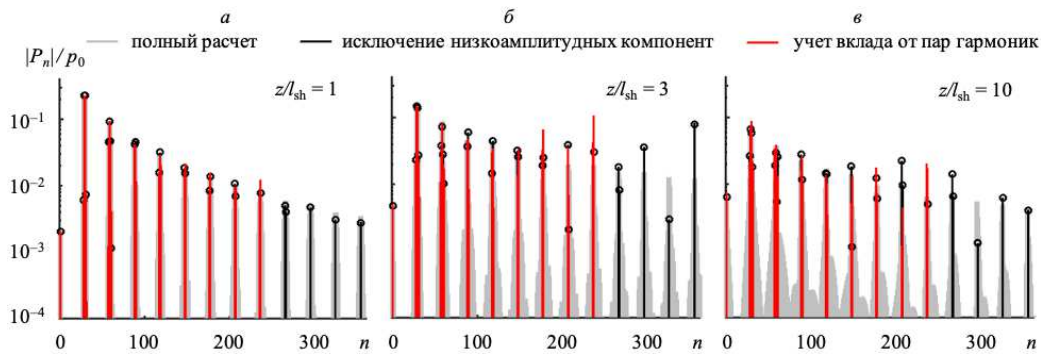


Рис. 5. Спектр нелинейной волны, рассчитанный на различных безразмерных расстояниях z/l_{sh} , равных 1 (а), 3 (б) и 10 (в) для полного расчета (серая линия) и двумя методами прореживания (черная линия — пороговый метод, красная линия — новый)

ных компонент уже достаточно, чтобы за счет комбинационных превзойти по точности предложенный ранее метод.

Наконец, на рис. 5, а–в представлен спектр нелинейной волны на расстояниях $z/l_{sh} = 1$ (рис. 5, а), 3 (рис. 5, б) и 10 (рис. 5, в), полученный при полном расчете (серая линия), а также с использованием прореживания спектра пороговым (черная линия) и новым (красная линия) методами. Как видно из рис. 5, высокочастотный спектр нелинейной волны рассчитывается неточно обоими методами, особенно на больших расстояниях. Однако, как показано ранее, такое поведение полного спектра волны несильно искажает величину амплитуды волны разностной частоты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован процесс генерации волны разностной частоты, формируемой при взаимодействии двух близких по частоте высокочастотных волн накачки в нелинейной среде. Расчеты проводились на приме-

ре двух взаимодействующих частот, характерных для работы параметрических излучателей [11], используемых в подводной акустике.

Предложен новый, отличающийся от ранее исследованного [10], метод прореживания спектра, позволяющий сократить количество оставляемых в численном алгоритме спектральных компонент с помощью отбора пар гармоник, вносящих наибольший вклад в амплитуду волны разностной частоты и удержания только их в численной схеме. Показано, что предложенный в работе метод уступает по точности методу, рассмотренному ранее, при малом количестве оставляемых в расчете гармоник ($N < 150$) на расстояниях до десяти длин образования разрыва. Однако при $N > 150$ оставляемых в схеме гармоник он является более точным и может быть использован при дальнейшем решении полной трехмерной нелинейно-дифракционной задачи о генерации волны разностной частоты при необходимости более точных вычислений.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 20-02-00676 и фонда «БАЗИС» 20-2-2-21-1.

[1] Новиков Б.К., Тимошенко В.И. Параметрические антенны в гидролокации. Л.: Судостроение, 1990.
 [2] Deimling J.S., Held P., Feldens P., Wilken D. // Geo-Mar. Lett. 2016. **36**, N 2. P. 113.
 [3] Yoneyama M., Fujimoto J., Kawamo Y., Sasabe S. // J. Acoust. Soc. Am. 1983. **73**, N 5. P. 1532.
 [4] Shi C., Gan W.-S. // IEEE Potentials. 2010. **29**, N 6. P. 20.
 [5] Westervelt P.J. // J. Acoust. Soc. Am. 1963. **35**, N 4. P. 535.
 [6] Sapozhnikov O.A., Khokhlova V.A., Cleveland R.O., Blanc-Benon P., Hamilton M.F. // Acoustics today. 2019. **15**, N 3. P. 55.

[7] Юлдашев П.В., Хохлова В.А. // Акуст. журн. 2011. **57**, № 3. С. 337.
 [8] Кащеева С.С., Сапожников О.А., Хохлова В.А., Аверкью М.А., Крам Л.А. // Акуст. журн. 2000. **46**, № 2. С. 211.
 [9] Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
 [10] Тюрина А.В., Юлдашев П.В., Есипов И.Б., Хохлова В.А. // Акуст. журн. 2022. **68**, № 2. С. 152.
 [11] Есипов И.Б., Попов О.Е., Солдатов В.Г. // Акуст. журн. 2019. **65**, № 4. С. 490.
 [12] Pierce A.D. Acoustics: an introduction to its physical principles and applications. Springer, 2019.

Numerical modeling of ultrasound difference–frequency wave generation under conditions of shock front formation

M.S. Sergeeva^a, A.V. Tyurina^b, P.V. Yuldashev^c, V.A. Khokhlova^d

Department of Acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia
E-mail: ^as_masha_ss@mail.ru, ^btiurina.av@physics.msu.ru, ^cvera@acs366.phys.msu.ru, ^dvera@acs366.phys.msu.ru

The problem of generation and propagation of a difference-frequency wave formed as the interaction of two high-intensity high-frequency pump waves is considered and described by the nonlinear Burgers equation. It is known that the evaluation of the nonlinear operator in this equation is particularly difficult due to the necessity of retaining several thousands of spectral components, especially under conditions of shock front formation in the waveform. For this reason, the method which enables to reduce the number of spectral components in the numerical algorithm is considered. The only restriction is that it should not affect the accuracy of calculation of a difference-frequency wave. The above method is compared to an earlier proposed one for a set of harmonics retaining in the nonlinear numerical scheme. It is shown that the new method is more accurate at shorter distances, but it outmatches the previous one on large distances only when using a bigger number of spectral components retained in the algorithm. Such behaviour is explained by the retention of a smaller number of high-frequency and a larger number of combination components.

PACS: 43.25.+y, 43.25.-x.

Keywords: nonlinearity, parametric transducer, difference frequency, Burgers equation, spectral approach.

Received 20 May 2022.

Сведения об авторах

1. Сергеева Мария Сергеевна — студент; e-mail: s_masha_ss@mail.ru.
2. Тюрина Анастасия Валерьевна — аспирант; e-mail: tiurina.av@physics.msu.ru.
3. Юлдашев Петр Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-29-45, e-mail: petr@acs366.phys.msu.ru.
4. Хохлова Вера Александровна — доктор физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-29-45, e-mail: vera@acs366.phys.msu.ru.