

УДК 534.2

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ СПЕКТРАЛЬНОГО ОПИСАНИЯ ГЕНЕРАЦИИ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ РАЗНОСТНОЙ ЧАСТОТЫ ПРИ ДВУХЧАСТОТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

© 2022 г. А. В. Тюрина^{а, *}, П. В. Юлдашев^{а, **}, И. Б. Есипов^б, В. А. Хохлова^{а, ***}^аМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Физический факультет, Ленинские горы 1, Москва, 119991 Россия^бРоссийский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина,
Ленинский проспект 65, Москва, 119991 Россия

*e-mail: tiurina.av@physics.msu.ru

**e-mail: petr@acs366.phys.msu.ru

***e-mail: vera@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 03.11.2021 г.

После доработки 25.11.2021 г.

Принята к публикации 30.11.2021 г.

Рассматривается спектральный алгоритм описания нелинейной генерации акустической волны разностной частоты, формируемой при взаимодействии двух близких интенсивных высокочастотных волн накачки. При таком двухчастотном взаимодействии, в условиях образования ударных фронтов в профиле волны, для корректного описания ее полного спектра необходимо использовать в численном алгоритме порядка нескольких тысяч спектральных компонент. В работе предложен метод, позволяющий существенно уменьшить это число при сохранении точности расчета поля волны разностной частоты. Метод состоит в ограничении высокочастотной части спектра и прореживании комбинационных частот, расположенных между кратными исходным волнам накачки компонентами спектра. В приближении распространения плоских одномерных волн рассмотрены примеры взаимодействия близких частот, характерных для работы подводной параметрической антенны. Показано, что метод позволяет более чем в 100 раз сократить количество спектральных компонент, включенных в алгоритм описания нелинейного оператора, и тем самым уменьшить число операций на четыре порядка, что делает реализуемыми алгоритмы описания параметрических взаимодействий, в том числе и в акустических пучках.

Ключевые слова: нелинейность, спектральный метод, разностная частота**DOI:** 10.31857/S0320791922020101

ВВЕДЕНИЕ

Исследование параметрических процессов является актуальной задачей для практических приложений нелинейной акустики [1, 2]. При нелинейном взаимодействии двух близких интенсивных высокочастотных волн накачки с частотами f_{pump1} и f_{pump2} происходит генерация кратных гармоник и комбинационных частот. Поскольку поглощение в среде растет с увеличением частоты, то высокочастотные спектральные компоненты затухают быстрее, и на достаточно большом удалении от источника распространяется только волна разностной частоты $f_{\text{dif}} = |f_{\text{pump1}} - f_{\text{pump2}}|$ [3]. Разработка алгоритмов расчета поля волны разностной частоты не теряет своей актуальности в силу наличия ряда преимуществ нелинейного ме-

ханизма генерации низкочастотного излучения и, как следствие, широкого практического применения параметрических излучателей. Особенностью такого двухчастотного взаимодействия является чрезвычайно высокая, порядка нескольких градусов, направленность низкочастотного излучения [4, 5]. Кроме того, по сравнению с обычным излучателем, работающим на той же частоте, параметрический излучатель отличается небольшими размерами, отсутствием боковых лепестков диаграммы направленности и широкой частотной полосой излучаемого сигнала.

Параметрические излучатели остаются объектом как теоретических [6], так и экспериментальных исследований в течение нескольких последних десятилетий [7–9]. Они активно используются как в гидроакустике, например, для акустической то-

мографии морских вод, зондирования океана, профилирования донных структур [4], так и в аэроакустике [10], например, при создании звуковых прожекторов [11] для различных практических применений [12].

В теоретическом описании процесса генерации и распространения волны разностной частоты используются модели различной сложности. Наиболее общий подход при решении трехмерных задач состоит в решении конечно-разностными методами нелинейной системы уравнений для сжимаемой сплошной среды с вязкостью [13]. Однако получение решений такой системы даже для радиально симметричных источников сопряжено с большими вычислительными затратами. Более удобной моделью для практического использования является однонаправленное уравнение Вестервельта, которое учитывает эффекты нелинейности, дифракции и термовязкого поглощения [3]. В сопровождающей системе координат его можно записать в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + \frac{c_0}{2} \int_{-\infty}^{\tau} \Delta_{\perp} p d\tau'. \quad (1)$$

Здесь p — акустическое давление, z — выделенное направление вдоль оси пучка, $\tau = t - z/c_0$ — время в бегущей системе координат, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа, c_0 — скорость звука, ρ_0 — плотность среды, β и δ — коэффициенты нелинейности и термовязкого поглощения в среде, соответственно. При необходимости в уравнении могут быть учтены и другие механизмы поглощения, например, релаксация.

Изначально уравнение Вестервельта использовалось при описании параметрических взаимодействий для получения аналитических оценок амплитуды давления на разностной частоте в дальнем поле излучателя [3]. В современных исследованиях уравнение Вестервельта решается численно, например, конечно-разностными методами во временном представлении [14]. На основе этого уравнения также возможно получить полуаналитические решения для поля разностной частоты в квазилинейном приближении без использования параксиального приближения [15].

При численном решении уравнения Вестервельта для ультразвуковых источников медицинской акустики широкое использование получил метод расщепления по физическим факторам [16, 17]. Согласно этому методу, на каждом шаге по продольной координате распространения волны операторы в правой части уравнения, описывающие различные физические эффекты, рассчитываются отдельно. Это позволяет использовать оп-

тимальную численную схему для того или иного оператора. Основная сложность возникает при расчете дифракционного оператора, для реализации которого часто используется метод углового спектра [18]. Для параметрических излучателей такой метод расчета был реализован в квазилинейном случае в трехмерной геометрии [19].

Более простой моделью при расчете полей параметрических излучателей является уравнение Хохлова—Заболотской—Кузнецова (ХЗК)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + \frac{c_0}{2} \int_{-\infty}^{\tau} \Delta_{\perp} p d\tau', \quad (2)$$

которое отличается от уравнения Вестервельта использованием параксиального приближения при расчете дифракционного оператора в правой части уравнения. Здесь $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — лапласиан по поперечным координатам. Для уравнения ХЗК были разработаны конечно-разностные численные схемы как во временном [20], так и в частотном представлениях [21], которые также были основаны на методе расщепления по физическим факторам. В дальнейшем эти схемы были использованы при описании полей разностной частоты радиально симметричных [22–24] и прямоугольных излучателей [25].

Основная сложность численного моделирования параметрических взаимодействий в нелинейных пучках состоит в том, что если не ограничиваться квазилинейным приближением и принимать во внимание возможность образования разрывов в волне накачки, то количество спектральных компонент, которые формально необходимо учитывать в расчете, становится очень большим, порядка нескольких тысяч. Это становится особенно критичным при использовании спектрального подхода для расчета нелинейного оператора, так как число операций пропорционально квадрату числа гармоник [26]. В этом случае, при решении уравнений (1) и (2) методом расщепления по физическим факторам, на каждом шаге сетки вдоль координаты распространения волны фактически решается одномерная задача. Использование временного подхода также затруднительно, так как, с одной стороны, временное окно должно быть достаточно длинным, чтобы вмещать низкочастотную компоненту, а с другой стороны, шаг дискретизации по времени должен быть достаточно малым, чтобы хорошо прописывались высокочастотные компоненты и их гармоники. В результате, даже с использованием современных многоядерных компьютеров трехмерное моделирование параметрических процессов в полях, создаваемых излучателями с апертурой произвольной формы, становится

сложным как с точки зрения необходимых объемов оперативной памяти, так и по времени вычислений.

Данное ограничение можно обойти, выделяя наиболее важные спектральные компоненты, которые участвуют в формировании сигнала на разностной частоте, и оперируя только ими в численной схеме. Такая идея рассматривалась ранее, но, насколько нам известно, не была реализована [24]. В нашей работе предложено оптимизировать расчет нелинейного оператора за счет прореживания спектра волны и выявления критериев, по которым гармоники исключаются либо остаются в спектре. Представлен алгоритм решения уравнений (1) и (2) в одномерной постановке, в которых рассматриваются только операторы нелинейности и поглощения; описываются соответствующие параметрические явления. В этом случае, без учета дифракционного оператора, уравнения (1) и (2) переходят в одномерное нелинейное уравнение Бюргерса [27], а предложенный метод позволяет существенно сократить число операций в алгоритме расчета нелинейного оператора. Развитие метода в одномерной постановке направлено на его дальнейшее использование при решении полной нелинейно-дифракционной задачи, рассмотрение которой остается за рамками данной работы.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

1.1. Нелинейное уравнение Бюргерса

Для моделирования эффектов нелинейности и поглощения при взаимодействии двух близких по частоте одномерных высокочастотных плоских волн запишем уравнение Бюргерса в виде [27]:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}, \quad (3)$$

с граничным условием для волн накачки с частотами f_{pump1} и f_{pump2} :

$$p(\tau, z = 0) = \frac{p_0}{2} \sin(\omega_{\text{pump1}} \tau) + \frac{p_0}{2} \sin(\omega_{\text{pump2}} \tau), \quad (4)$$

где p_0 — максимально достижимое акустическое давление в исходной волне накачки, а $\omega_{\text{pump1}} = 2\pi f_{\text{pump1}}$ и $\omega_{\text{pump2}} = 2\pi f_{\text{pump2}}$ — циклические частоты.

Для удобства численного решения уравнения (3) перейдем к безразмерным переменным: $P = p/p_0$, $\theta = \omega_{\text{dif}} \tau$, $Z = z/l_{\text{sh}}$, где $\omega_{\text{dif}} = 2\pi f_{\text{dif}}$ — циклическая частота, соответствующая разностной частоте $f_{\text{dif}} = f_{\text{pump1}} - f_{\text{pump2}}$ (для определенности положим $f_{\text{pump1}} > f_{\text{pump2}}$), l_{sh} — длина образования разрыва для периода волны с максимальной амплитудой p_0 и

частотой ω_{pump1} , которая является k -той гармонической разностной частоты ($\omega_{\text{pump1}} \equiv \omega_k = k\omega_{\text{dif}}$):

$$l_{\text{sh}} = \frac{\rho_0 c_0^3}{\beta \omega_{\text{pump1}} p_0}.$$

Вводя также обратное акустическое число Рейнольдса или число Гольдберга Γ на частоте накачки f_{pump1} как:

$$\Gamma = \frac{\delta \omega_{\text{pump1}} \rho_0}{2\beta p_0}, \quad (5)$$

получаем уравнение Бюргерса (3) и граничное условие (4) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{1}{k} \left(P \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\Gamma}{k} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \right), \quad (6)$$

$$P(\theta, Z = 0) = 0.5(\sin(k\theta) + \sin([k-1]\theta)). \quad (7)$$

Для уравнения (3) с граничным условием (4) можно получить аналитическое решение для амплитуды волны разностной частоты $A_{\text{dif,analyt}}(z)$ в квазилинейном приближении в предположении постоянства амплитуды волн накачки A_1, A_2 (4) [28]:

$$A_{\text{dif,analyt}}(z) = \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \omega_{\text{dif}} A_1 A_2 z. \quad (8)$$

1.2. Граничное волновое поле и параметры среды

Численное моделирование генерации и распространения волны разностной частоты проводилось на примере частот, амплитуд и параметров среды, характерных для экспериментов с недавно разработанной параметрической антенной в воде [29]. Считается, что максимальная эффективность параметрической антенны достигается при достаточно высокой интенсивности волн накачки, когда нелинейное взаимодействие компенсирует диссипативные процессы и профиль волны близок к разрывному [30, 31]. Для численного анализа в качестве граничного условия были взяты три волны накачки с частотами $f_{\text{pump1}} = 150$ кГц и $f_{\text{pump2}} = 145, 140$ и 135 кГц. Таким образом, генерировались волны разностной частоты с $f_{\text{dif}} = 5, 10$ и 15 кГц, соответственно. На рис. 1 представлен один период безразмерного граничного профиля волны (7) для трех выбранных пар взаимодействующих частот накачки.

Для оценки относительных вкладов нелинейности и поглощения использовались данные недавних исследований с использованием подводной параметрической антенны: $p_0 = 0.6$ МПа, $c_0 = 1502.25$ м/с, $\rho_0 = 996.81$ кг/м³ [29] и характерные

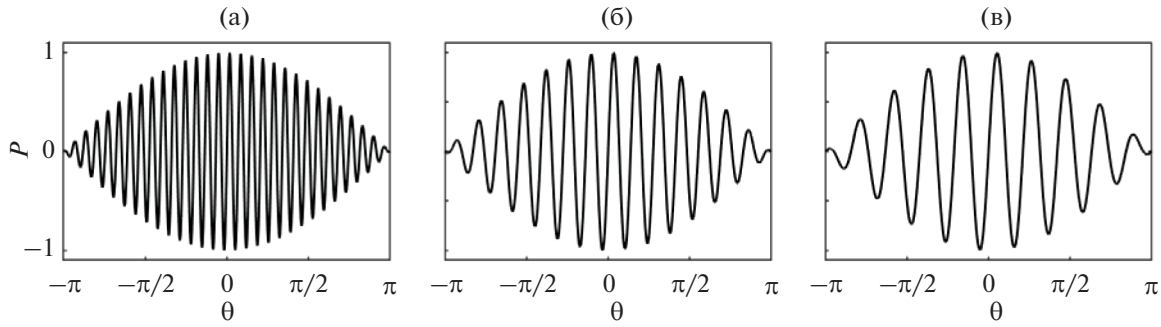


Рис. 1. Один период безразмерного начального профиля волны при $Z = 0$ для трех случаев взаимодействующих пар частот накачки: (а) $-f_{\text{pump1}} = 150$ кГц и $f_{\text{pump2}} = 145$ кГц; (б) $-f_{\text{pump1}} = 150$ кГц и $f_{\text{pump2}} = 140$ кГц; (в) $-f_{\text{pump1}} = 150$ кГц и $f_{\text{pump2}} = 135$ кГц.

для морской воды величины параметров нелинейности и поглощения: $\beta = 3.5$, $\delta = 4.42 \times 10^{-6}$ м²/с [32].

1.3. Численный алгоритм

Представим решение уравнения (6) в виде конечного ряда Фурье с N_{max} временных гармоник:

$$P(\theta, Z) = \sum_{n=-N_{\text{max}}}^{N_{\text{max}}} P_n(Z) e^{in\theta}.$$

Тогда уравнение (6) в частотном представлении записывается в виде конечной системы связанных нелинейных уравнений [26]:

$$\frac{\partial P_n}{\partial Z} = \frac{in}{k} \left(\sum_{m=1}^{N_{\text{max}}-n} P_m^* P_{n+m} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} P_m P_{n-m} \right) - \frac{\Gamma}{k^2} n^2 P_n, \quad (9)$$

где $1 \leq n \leq N_{\text{max}}$, P_m^* — комплексно-сопряженная амплитуда гармоники с номером m , а i — мнимая единица. При этом граничное условие (7) имеет вид: $P_{k-1,0} = P_{k,0} = -0.25i$.

Система уравнений (9) решалась методом расщепления по физическим факторам [16–18], при этом каждый шаг по координате Z начинался и заканчивался оператором поглощения, рассчитываемым на половинном шаге сетки $\Delta Z/2$. Таким образом, схема применения метода расщепления по физическим факторам выглядит так:

$$P(\theta, Z + \Delta Z) = L_{A,\Delta Z/2} L_{N,\Delta Z} L_{A,\Delta Z/2} P(\theta, Z),$$

где действие оператора поглощения на шаге $\Delta Z/2$ и оператора нелинейности на шаге ΔZ обозначено как $L_{A,\Delta Z/2}$ и $L_{N,\Delta Z}$, соответственно. Система нелинейных уравнений (9) без учета поглощения решалась методом Рунге–Кутты четвертого порядка [26], а для расчёта поглощения для каждой из гармоник использовалось аналитическое решение в виде затухающей экспоненты.

Для того чтобы выявить оптимальные параметры численного алгоритма для получения референсных решений, сначала рассчитывалось распространение плоской волны накачки с частотой $f_{\text{pump1}} = 150$ кГц и амплитудой p_0 , соответствующей максимальной амплитуде в профиле волны при двухчастотном взаимодействии (рис. 1): $p(\tau, z = 0) = p_0 \sin(\omega_{\text{pump1}} \tau)$. Расчеты проводились при учете $N_{\text{max}} = 250$ гармоник, безразмерный шаг пространственной сетки составил $\Delta Z = 0.01$, число Гольдберга (5) равно $\Gamma = 10^{-3}$. Для обеспечения устойчивости численной схемы при моделировании необходимо, чтобы на разрыв приходилось около 9 точек [33], что при выбранном количестве гармоник N_{max} определяется соответствующей величиной поглощения δ , поэтому физическое число Гольдберга $\Gamma = 10^{-3}$ было увеличено примерно в 10 раз. Выбор $\Gamma_{\text{model}} = 0.01$ обусловлен взятым для анализа количеством гармоник $N_{\text{max}} = 250$, соответствующим шагу сетки во времени $\Delta \theta = \pi/N_{\text{max}}$. В этом случае заметные отличия наблюдаются только в структуре ударного фронта в его окрестности $\theta = 0 \pm 4\pi/N_{\text{max}}$, что составляет 1.6% от длительности периода.

Сравнение результатов численного моделирования для вышеперечисленных параметров (штриховая линия) с аналитическим решением для римановой плоской волны [34] (сплошная линия) представлено на рис. 2. Как видно из рисунка, численное решение хорошо соответствует аналитическому как на расстояниях до образования разрыва ($Z < 1$), так и после ($Z > 1$). Различия проявляются только в тонкой структуре ударного фронта и обусловлены конечным значением числа Гольдберга, которое и позволяет использовать число гармоник, ограниченное сверху. На остальных участках решения практически не отличаются, и при $\theta = 0 \pm 20\pi/N_{\text{max}}$ ошибка составляет уже ме-

нее 1%. Таким образом, использование 250 гармоник для описания нелинейных процессов в высокочастотной волне представляется приемлемым.

Далее, при моделировании двухчастотных взаимодействий, также использовалось 250 гармоник частоты накачки f_{pump1} и число Гольдберга $\Gamma_{\text{model}} = 0.01$. В прямой постановке для описания волн с выбранными частотами $f_{\text{pump1}} = 150$ кГц и $f_{\text{pump2}} = 145, 140$ и 135 кГц, необходимо учитывать $N_{\text{max}} = 7500, 3750$ и 2500 гармоник разностной частоты, соответственно, что представляется трудно реализуемым при моделировании нелинейно-дифракционных задач на основе уравнений (1) и (2) ввиду квадратичного роста числа операций при расчете нелинейного оператора (9) в зависимости от N_{max} .

1.4. Метод прореживания спектра

Идея предлагаемого в данной работе метода уменьшения числа спектральных компонент в численном решении, или прореживания спектра, состоит в следующем. Известно, что при распространении квазигармонической волны большой интенсивности каскадные процессы генерации новых частот направлены в основном в сторону перехода энергии волны вверх по спектру [27]. Эффективность обратных процессов в сторону генерации разностных частот гораздо меньше. Ясно, что основной вклад в генерацию низкочастотных компонент спектра будут вносить высокочастотные компоненты с наибольшей амплитудой, сосредоточенные вблизи кратных частот волн накачки. При этом в полном спектре нелинейной волны присутствуют частоты с достаточно малой амплитудой, которые можно отбросить без существенной потери точности решения для разностной частоты. Иллюстрация к методу прореживания спектра представлена на рис. 3 для случая $f_{\text{dif}} = 10$ кГц, где слева изображен исходный спектр на расстоянии $Z = 0$ (два пика на частотах накачки), а справа – спектр волны на расстоянии $Z = 3$, рассчитанный с учетом полного числа гармоник $N_{\text{max}} = 3750$. Отметим, что расстояние $Z = 3$ соответствует трем длинам образования разрыва на высокочастотном периоде с максимальной амплитудой p_0 , нелинейные эффекты для остальных периодов с меньшей амплитудой выражены слабее (рис. 1). Как видно, амплитуда компонент спектра максимальна вблизи кратных гармоник частот накачки, а между ними ее величина гораздо меньше.

Чтобы определить номера гармоник с наибольшими амплитудами, вводилось безразмерное

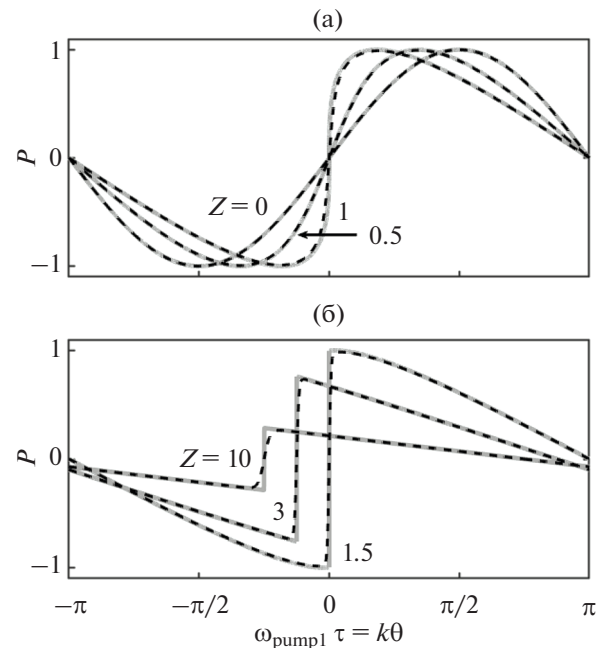


Рис. 2. Искажение одного периода безразмерного профиля волны накачки с частотой $f_{\text{pump1}} = 150$ кГц, амплитудой p_0 и поглощением $\Gamma_{\text{model}} = 0.01$ на расстояниях: (а) – до образования разрыва по мере укрупнения фронта, $Z = 0, 0.5$ и 1 ; (б) – после образования разрыва по мере уменьшения амплитуды, $Z = 1.5, 3$ и 10 . Профили на расстояниях $Z = 3$ и $Z = 10$ искусственно смещены вдоль временной шкалы на $\pi/8$ и $\pi/4$, соответственно. Сплошная линия – аналитическое решение, штриховая линия – численное решение в случае учета $N_{\text{max}} = 250$ гармоник в спектре.

пороговое давление P_{th} , отсекающее гармоники с меньшей амплитудой (кроме первой) таким образом, чтобы в оптимизированном алгоритме присутствовало заранее заданное число гармоник N , меньшее, чем в эталонном решении. Здесь “эталонным” решением будем называть численное решение, полученное в моделировании с учетом всех гармоник N_{max} . Пороговые значения P_{th} варьировались так, чтобы количество компонент спектра с амплитудой выше пороговой было $N = 12, 25, 50$ (штриховая, штрихпунктирная и пунктирная линия, соответственно). Также варьировалось безразмерное расстояние $Z = 1, 1.5$ и 3 , на котором проводилась данная процедура для рассматриваемых в работе трех значений f_{dif} . В полученном прореженном спектре с амплитудами выше порогового уровня, во-первых, ограничивалась высокочастотная часть спектра, а во-вторых, сокращалось количество комбинационных компонент, расположенных между амплитудными пиками кратных f_{pump1} и f_{pump2} частот. Далее алгоритм решения уравнения (6) модифицировался

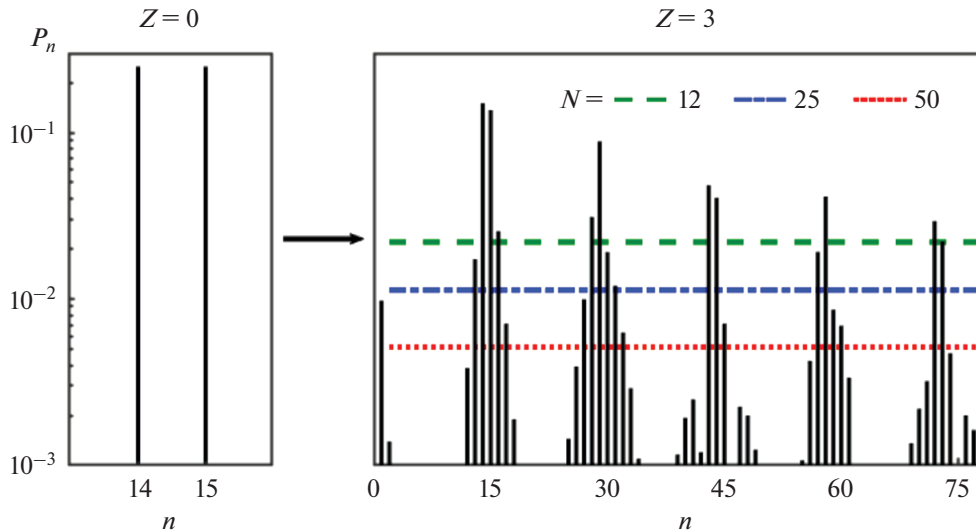


Рис. 3. Иллюстрация к методу прореживания спектра на примере случая $f_{\text{dif}} = 10$ кГц. Слева изображен спектр исходной волны P_n , где $n = f/f_{\text{dif}}$ – номер гармоники разностной частоты, на расстоянии $Z = 0$, а справа – спектр на расстоянии $Z = 3$ и пороги для $N = 12, 25, 50$ (штриховая, штрихпунктирная и пунктирная линия, соответственно).

таким образом, чтобы вычисления проходили только по индексам гармоник, оставленных после прореживания.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 4 представлены зависимости амплитуды P_{dif} волны разностной частоты от расстояния Z для трех значений f_{dif} : 5 кГц (рис. 4а, 4г), 10 кГц (рис. 4б, 4д) и 15 кГц (рис. 4в, 4е). Эталонное решение при $N = N_{\text{max}}$ показано на всех графиках сплошной красной линией, а квазилинейное решение (8) – серой маркерной линией. Верхний ряд графиков (рис. 4а–4в) получен при прореживании спектра эталонного решения на расстоянии $Z = 3$ с различным количеством включенных в нелинейный алгоритм гармоник: $N = 12$ (штриховая линия), 25 (сплошная линия) и 50 (пунктирная линия). Нижний ряд (рис. 4г–4е) получен при прореживании спектра с фиксированным количеством включенных в нелинейный алгоритм гармоник $N = 25$ на различных расстояниях $Z = 1$ (пунктирная линия), 1.5 (штриховая линия) и 3 (сплошная линия). Зависимости $P_{\text{dif}}(Z)$ на начальной стадии распространения показаны на вкладках соответствующих рисунков.

Видно, что на начальном этапе, вплоть до расстояния $Z = 2$, амплитуда волны разностной частоты в численном решении, как при учете всех гармоник, так и при прореживании спектра, растет линейно и практически не отличается от аналитического решения, полученного в квазилиней-

ном приближении. Затем линейный рост замедляется и сменяется насыщением на расстояниях порядка нескольких длин образования разрыва. При этом, чем больше величина разностной частоты f_{dif} , тем больше энергии переходит в нее от частот накачки в процессе генерации. Так, в соответствии с квазилинейным приближением (8), на расстоянии $Z = 1$ амплитуда волны разностной частоты пропорциональна ее величине и для $f_{\text{dif}} = 5$ кГц составляет 0.2%, для $f_{\text{dif}} = 10$ кГц – 0.4% и для $f_{\text{dif}} = 15$ кГц – 0.6% от максимальной амплитуды исходной волны накачки p_0 или 0.01, 0.04 и 0.09% от средней по периоду низкочастотной волны начальной интенсивности $p_0^2/(4c_0\rho_0)$. При достижении расстояний в несколько длин образования разрыва, на которых наступает насыщение амплитуды волны разностной частоты, ее амплитуда дополнительно увеличивается более чем в 2 раза, что соответствует увеличению интенсивности более чем в 4 раза.

Влияние прореживания спектра эталонного решения на расстоянии $Z = 3$ на точность получаемого численного решения для P_{dif} при различном количестве включенных в нелинейный алгоритм гармоник $N = 12, 25$ и 50 в сравнении с эталонным решением при $N = N_{\text{max}}$ иллюстрируется на рис. 4а–4в. Видно, что при $N = 12$ численное решение для волны разностной частоты сильно отличается от эталонного, начиная с расстояний порядка $Z = 3$. При использовании $N = 25$ гармоник в нелинейном алгоритме ошибка в вы-

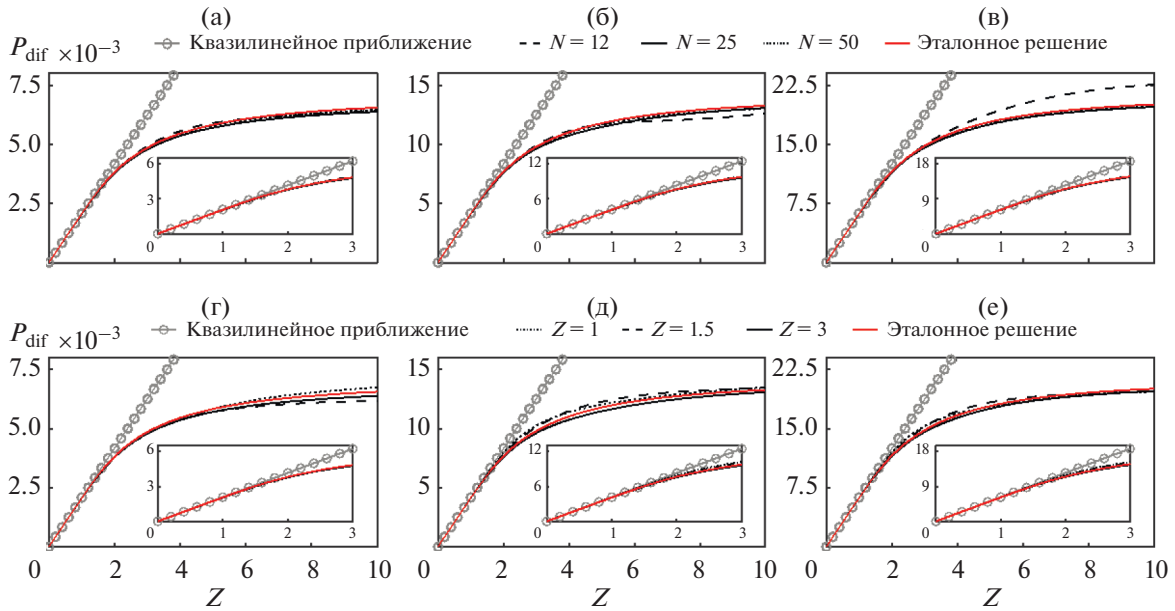


Рис. 4. Зависимости амплитуды P_{dif} волны разностной частоты от расстояния Z для трех значений f_{dif} : (а, г) 5 кГц, (б, д) 10 кГц и (в, е) 15 кГц. Графики (а)–(в) – прореживание спектра проводилось на расстоянии $Z = 3$ при различном количестве включенных в алгоритм гармоник: $N = 12$ (штриховая линия), 25 (сплошная линия) и 50 (пунктирная линия); (г)–(е) – прореживание проводилось при $N = 25$ на разных расстояниях: $Z = 1$ (пунктирная линия), 1.5 (штриховая линия) и 3 (сплошная линия). На графиках также представлено решение в квазилинейном приближении (сплошная маркерная линия) и эталонное решение (сплошная красная линия) при $N = N_{\text{max}}$ (7500, 3750 и 2500). Зависимости $P_{\text{dif}}(Z)$ на начальной стадии распространения показаны на вкладках соответствующих рисунков.

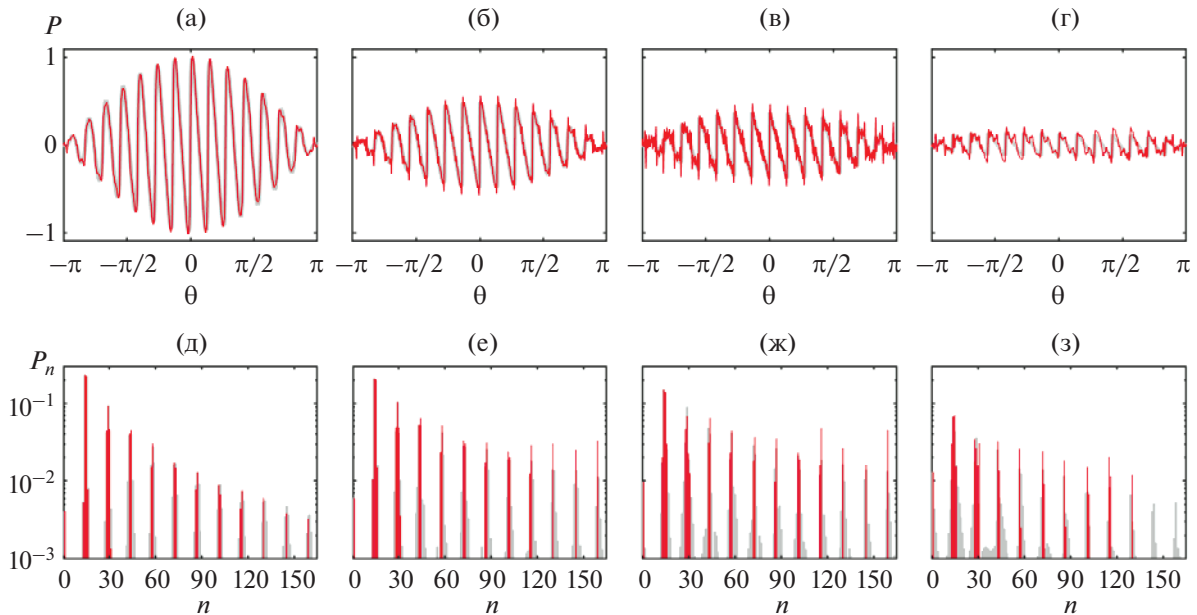


Рис. 5. (а)–(г) – Один период безразмерного профиля давления для $f_{\text{pump1}} = 150$ кГц и $f_{\text{pump2}} = 140$ кГц на расстояниях $Z = 1, 1.5, 3$ и 10 , соответственно; (д)–(з) – спектр волны на тех же расстояниях $Z = 1, 1.5, 3$ и 10 , соответственно. Жирной серой линией представлено эталонное решение, тонкой красной линией – результат прореживания спектра на расстоянии $Z = 3$ в случае включения в нелинейный алгоритм $N = 25$ гармоник.

числении амплитуды волны разностной частоты составляет менее 0.4% на расстоянии $Z = 1$, менее 1.8% на расстоянии $Z = 3$ и менее 2.8% на расстоянии $Z = 10$, при этом максимальная ошибка во всем диапазоне расстояний составляет менее 2.8%. При учете $N = 50$ гармоник ошибка не превышает 2% на всех расстояниях. С учетом того, что параметрические излучатели используются в основном в режимах вблизи образования ударных фронтов, выбор $N = 25$ гармоник представляется достаточным для дальнейшего анализа.

Влияние проведения прореживания спектра с фиксированным количеством включенных в нелинейный алгоритм гармоник $N = 25$ на различных расстояниях $Z = 1, 1.5$ и 3 в сравнении с эталонным решением при $N = N_{\max}$ иллюстрируется на рис. 4г–4е. Видно, что все полученные решения достаточно близки, однако прореживание на расстоянии $Z = 3$ оказывается предпочтительным. При таком выборе отличие от эталонного решения на всех расстояниях для всех трех разностных частот составляет менее 2.8%.

Таким образом, для трех пар взаимодействующих волн накачки с разностными частотами $f_{\text{dif}} = 5, 10$ и 15 кГц число участвующих в нелинейном алгоритме спектральных компонент возможно сократить с $N_{\max} = 7500, 3750$ и 2500 до $N = 25$ с ошибкой менее 3% в расчете амплитуды разностной частоты при наиболее удачном выборе расстояния, на котором выполняется прореживание спектра. Дальнейшие результаты будут представлены для $N = 25$ спектральных компонент, полученных при прореживании эталонного численного решения на расстоянии $Z = 3$.

Отметим, что на расстояниях $Z < 2$ аналитическое решение (8), полученное в квазилинейном приближении при условии постоянства амплитуд волн накачки (сплошная маркерная линия на рис. 4а–4е), хорошо соответствует эталонному решению и может быть использовано вместо численного расчета нелинейного оператора. На расстояниях $Z > 2$ ошибка при использовании квазилинейного приближения быстро возрастает.

На рис. 5 представлены характерные профили давления (рис. 5а–5г) и спектры (рис. 5д–5з) для случая $f_{\text{dif}} = 10$ кГц при распространении волны на расстоянии $Z = 1, 1.5, 3$ и 10 (тонкая красная линия) в сравнении с эталонным решением при $N = N_{\max}$ (жирная серая линия) в случае прореживания спектра на расстоянии $Z = 3$ и выборе порога, при котором $N = 25$. Видно, что вследствие ограничения удерживаемых гармоник на высоких частотах, в профиле появляются осцилляции за счет эффекта отражения частот (рис. 5а–5г). Однако,

как показано выше, эти артефакты в описании полного спектра волны слабо влияют на амплитуду волны разностной частоты (рис. 4). В итоговом прореженном спектре (рис. 5д–5з) остается разностная частота и группы от 1 до 5 спектральных компонент вокруг 11 пиков, кратных начальным частотам накачки. Каждая из этих групп представляет собой последовательное чередование двух и одной компонент спектра с максимальной амплитудой, по бокам которых присутствуют комбинационные частоты, число которых изменяется от 0 до 3 для первых шести групп и равно 0, начиная с седьмой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе численными методами исследован процесс генерации волны разностной частоты, формируемой при взаимодействии двух близких высокочастотных волн накачки в нелинейной среде. Расчеты проводились для одномерной волны на примере трех пар взаимодействующих частот, характерных для работы параметрических излучателей, используемых в подводной акустике.

Был предложен метод прореживания спектра, позволяющий сократить число включенных в нелинейный алгоритм спектральных компонент более чем на два порядка, что снижает количество операций на четыре порядка. Разработанный подход включает в себя ограничение числа высокочастотных компонент и сокращение комбинационных частот малой амплитуды, расположенных в промежутках между кратными исходным волнам гармониками. Показано, что прореживание частот в численном решении с большим числом спектральных компонент предпочтительно проводить на расстоянии, равном трем длинам образования разрыва для высокочастотного периода волны накачки с максимальной амплитудой. При таком выборе амплитуда волны разностной частоты с ошибкой менее трех процентов соответствует полученной в расчетах с учетом полного числа спектральных компонент вплоть до расстояний в десять длин образования разрыва.

Амплитуда волны разностной частоты пропорциональна величине f_{dif} и на расстоянии, равном одной длине образования разрыва, составляет 0.2, 0.4 и 0.6% от максимальной амплитуды волны накачки или 0.01, 0.04 и 0.09% от средней по периоду низкочастотной волны интенсивности для частот $f_{\text{dif}} = 5, 10$, и 15 кГц. При достижении расстояний насыщения амплитуда и интенсивность волны разностной частоты дополнительно увеличиваются более чем в 2 и в 4 раза, соответственно.

Показано также, что на расстояниях, меньших двух характерных длин образования разрыва, аналитическое выражение, полученное в квазилинейном приближении при условии постоянства амплитуд волн накачки, с хорошей точностью аппроксимирует эталонное решение для большого числа спектральных компонент. Таким образом, квазилинейное приближение может быть использовано при моделировании нелинейных пучков. Результаты, полученные в работе, в дальнейшем могут быть использованы для решения полной трехмерной нелинейно-дифракционной задачи о генерации волны разностной частоты с помощью антенной решетки [29, 31].

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 20-02-00676 и фонда “БАЗИС” 20-2-2-21-1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gan W.-S., Yang J., Kamakura T. A review of parametric acoustic array in air // *Applied Acoustics*. 2012. V. 73. № 12. P. 1211–1219.
2. Zhou H., Huang S.H., Li W. Parametric acoustic array and its application in underwater acoustic engineering // *Sensors*. 2020. V. 20. № 7. P. 2148.
3. Westervelt P.J. Parametric acoustic array // *J. Acoust. Soc. Am.* 1963. V. 35. № 4. P. 535–537.
4. Новиков Б.К., Тимошенко В.И. Параметрические антенны в гидролокации. Л.: Судостроение, 1990. 250 с.
5. Sapozhnikov O.A., Khokhlova V.A., Cleveland R.O., Blanc-Benon P., Hamilton M.F. Nonlinear Acoustics Today // *Acoustics today*. 2019. V. 15. № 3. P. 55–64.
6. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. 264 с.
7. Зверев В.А., Калачев А.И. Измерение взаимодействия звуковых волн в жидкостях // *Акуст. журн.* 1958. Т. 4. № 4. С. 321–324.
8. Зверев В.А., Калачев А.И. Измерение рассеяния звука звуком при наложении параллельных пучков // *Акуст. журн.* 1968. Т. 14. № 2. С. 214–220.
9. Гурбатов С.Н., Дерябин М.С., Касьянов Д.А., Курин В.В. Об использовании вырожденного параметрического взаимодействия интенсивных акустических пучков для усиления слабых сигналов // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 3. С. 235–245.
10. Bennett M.B., Blackstock D.T. Parametric array in air // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. V. 57. № 3. P. 562–568.
11. Yoneyama M., Fujimoto J., Kawano Y., Sasabe S. The audio spotlight: an application of nonlinear interaction of sound waves to a new type of loudspeaker design // *J. Acoust. Soc. Am.* 1983. V. 73. № 5. P. 1532–1536.
12. Shi C., Gan W.-S. Development of a parametric loudspeaker: a novel directional sound generation technology // *IEEE Potentials*. 2010. V. 29. № 6. P. 20–24.
13. Nomura H., Hedberg C.M., Kamakura T. Numerical simulation of parametric sound generation and its application to length-limited sound beam // *Applied Acoustics*. 2012. V. 73. № 12. P. 1231–1238.
14. Zhu L., Florencio D. 3D numerical modeling of parametric speaker using finite-difference time-domain // *IEEE international conference on acoustics, speech and signal processing (ICASSP)*. IEEE, 2015. P. 5982–5986.
15. Cervenka M., Bednarik M. Non-paraxial model for a parametric acoustic array // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 134. № 2. P. 933–938.
16. Tavakkoli J., Cathignol D., Souchon R., Sapozhnikov O.A. Modeling of pulsed finite-amplitude focused sound beams in time domain // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 104. № 4. P. 2061–2072.
17. Юлдашев П.В., Хохлова В.А. Моделирование трехмерных нелинейных полей ультразвуковых терапевтических решеток // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 3. С. 337–347.
18. Zemp R.J., Tavakkoli J., Cobbold R.S.C. Modeling of nonlinear ultrasound propagation in tissue from array transducers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113. № 1. P. 139–152.
19. Prieur F. 3D simulation of parametric ultrasound fields // *AIP Conference Proceedings*. AIP, 2012. V. 1474. № 1. P. 387–390.
20. Lee Y.S., Hamilton M.F. Time-domain modelling of pulsed finite-amplitude sound beams // *J. Acoust. Soc. Am.* 1995. V. 97. № 2. P. 906–917.
21. Aanonsen S.I. Numerical computation of the nearfield of a finite amplitude sound beam // *Tech. Rep. № 73*. 1983. Dept. of Math., Univ. of Bergen, Norway.
22. Ji P., Tan E.-L., Gan W.-S., Yang J. A comparative analysis of preprocessing methods for the parametric loudspeaker based on the Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov equation for speech reproduction // *IEEE transactions on audio speech and language processing*. IEEE, 2011. V. 19. № 4. P. 937–946.
23. Averkiou M.A., Lee Y.-S., Hamilton M.F. Self-demodulation of amplitude- and frequency-modulated pulses in a thermoviscous fluid // *J. Acoust. Soc. Am.* 1993. V. 94. № 5. P. 2876–2883.
24. Kamakura T., Hamada N., Aoki K., Kumamoto Y. Non-linearly generated spectral components in the nearfield of a directive sound source // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. V. 85. № 6. P. 2331–2337.
25. Kamakura T., Nomura H., Akiyama M., Hedberg C.M. Parametric sound fields formed by phase-inversion excitation of primary waves // *Acta Acustica*. 2011. V. 97. № 2. P. 209–218.
26. Кашеева С.С., Сапожников О.А., Хохлова В.А., Аверкью М.А., Крам Л.А. Нелинейное искажение и поглощение мощных акустических волн в среде со степенной зависимостью коэффициента поглощения от частоты // *Акуст. журн.* 2000. Т. 46. № 2. С. 211–219.
27. Руденко О.В., Соляун С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.

28. Новиков Б.К., Руденко О.В., Солуян С.И. К вопросу о параметрическом излучателе ультразвука // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 4. С. 591–597.
29. Есипов И.Б., Попов О.Е., Солдатов В.Г. Компрессия сигнала параметрической антенны в мелко-водном волноводе // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 4. С. 490–498.
30. Moffett M.B., Mellen R.H., Konrad W.L. Model for parametric acoustic source of rectangular aperture // J. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 63. № 5. С. 1326–1331.
31. Есипов И.Б., Попов О.Е., Кенигсбергер Г.В., Сизов И.И. Параметрическая антенна для гидрофизических исследований на протяженных трассах // Известия РАН. Серия физическая. 2016. Т. 80. № 10. С. 1340–1349.
32. Pierce A.D. Acoustics: an introduction to its physical principles and applications. Springer, 2019. 768 p.
33. Maxwell A.D., Yuldashev P.V., Kreider W., Khokhlova T.D., Schade G.R., Hall T.L., Sapozhnikov O.A., Bailey M.R., Khokhlova V.A. A prototype therapy system for transcutaneous application of boiling histotripsy // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Contr. IEEE, 2017. V. 64. № 10. P. 1542–1557.
34. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. М.: Физматлит, 2008. 496 с.