

УДК 534.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН С РАЗРЫВАМИ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ ТИПА БИОЛОГИЧЕСКОЙ ТКАНИ

© 2014 г. Е. Г. Лобанова*, С. В. Лобанов**, В. А. Хохлова*,***

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119991 Москва, Ленинские горы

E-mail: moreva@physics.msu.ru, vera@acs366.phys.msu.ru

**Сколковский институт науки и технологии
143025 Сколково, Новая улица

***Центр промышленного и медицинского ультразвука
Лаборатория прикладной физики университета шт. Вашингтон
Сизл, шт. Вашингтон, 98105, США

Поступила в редакцию 05.02.2014 г.

Развита численная модель описания распространения одномерных встречных волн в нелинейной среде с произвольным степенным законом поглощения и соответствующим законом дисперсии. Модель основана на решении обобщенных одномерных уравнений Навье–Стокса с поглощением в виде оператора свертки по времени в уравнении состояния. Разработанный алгоритм позволяет описывать взаимодействие волн при наличии ударных фронтов в средах типа биологических тканей. Моделирование проводилось с использованием конечно-разностных методов на смещенных сетках; поглощение и дисперсия скорости звука учитывались с помощью причинной функции памяти. На основе развитой модели проведены численные расчеты, демонстрирующие эффекты поглощения и дисперсии при нелинейном распространении импульсов различной формы, а также их отражения от импедансных акустических границ.

Ключевые слова: релаксация, дисперсия, нелинейность.

DOI: 10.7868/S0320791914040078

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение фундаментальной проблемы нелинейного распространения встречных акустических волн в неоднородных поглощающих средах представляет собой одно из перспективных направлений современной акустики. Во многом это связано с развитием новых приложений мощного ультразвука в медицине [1–3]. Примерами являются ультразвуковая эхография с использованием высших гармоник [4, 5], разрушение почечных камней сфокусированными ударными импульсами (экстракорпоральная литотрипсия) [6, 7] и неинвазивная ультразвуковая хирургия [8, 9]. Основные результаты в данной области получены для однонаправленного распространения плоских волн и ограниченных пучков в воде и биологических тканях, описываемых модельными нелинейными уравнениями эволюционного типа [2–6, 8–10]. Однако часто для решения практически важных задач визуализации воздействия ультразвука на ткань и оценки эффективности и безопасности терапевтического воздействия при облучении через слои тканей различного типа необходимо учитывать эффекты отражения и рассеяния. В этом слу-

чае встает вопрос о построении и решении полного нелинейного волнового уравнения, где результатов на сегодняшний день получено гораздо меньше [7, 11, 12]. Важной частью построения полной волновой модели является включение в нее частотно-зависимого поглощения и дисперсии, удовлетворяющих экспериментальным данным и соответствующих принципу причинности.

Как известно, волновое уравнение для классической вязкой теплопроводящей жидкости содержит дифференциальный оператор, соответствующий поглощению, пропорциональному квадрату частоты. Механизмы поглощения в мягких биологических тканях значительно более сложные, они обусловлены различными видами колебательной, структурной и химической релаксации, что приводит к экспериментально наблюдаемому степенному частотному закону поглощения в виде

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right|^\eta, \quad \eta = y + 1, \quad (1)$$

где α_0 — коэффициент поглощения на частоте ω_0 , ω — круговая частота, а величина показателя сте-

пени η обычно изменяется в диапазоне от 1 до 1.5 [1].

Чтобы учесть это различие, дифференциальный оператор поглощения для вязкой теплопроводящей жидкости заменяется альтернативным оператором потерь. Так, Руденко, Солуяном и Хохловым было предложено записать оператор потерь в уравнении ХЗК в общем интегральном виде как свертку решения с ядром, соответствующим произвольному частотному закону поглощения в среде [13]. Различные конкретные виды интегральных операторов для описания поглощения в средах со степенным законом поглощения были получены позже в работах О’Доннелла [14], Коллинса [15] и Сзабо [16]. Был также предложен альтернативный подход, который заключается в аппроксимации степенного закона поглощения (1) суммой релаксационных процессов. Такой подход соответствует связи поглощения в ткани с различными релаксационными процессами. Были предложены модели непрерывного распределения релаксационных параметров [17] и дискретного набора из нескольких релаксационных процессов [18]. Было показано, что два процесса релаксации достаточно точно аппроксимируют степенной закон поглощения в диапазоне 1–12 МГц [19].

При проведении численного моделирования интегральный вид оператора поглощения существенно замедляет расчеты. В качестве альтернативы Чен и Нолм получили оператор потерь на основе дробного лапласиана для уравнений нелинейной акустики [20]. Этот оператор был позднее обобщен с учетом дисперсии скорости звука в соответствии с требованиями соотношений Крамера–Кронига [21]. В сравнении с оператором временной свертки вычисление дробного лапласиана зависит только от значений поля давления в текущие моменты времени. Это позволяет эффективно проводить численные расчеты с использованием псевдоспектрального и K -пространственных методов [22].

Таким образом, моделирование распространения акустических волн в средах со степенным законом поглощения по частоте $|\omega|^\eta$ сводится к введению в волновое уравнение дробного лапласиана $(-\nabla^2)^{\eta/2}$ в пространственных координатах или интегрального временного оператора поглощения. При этом построение самого интегрального оператора, отвечающего степенному закону поглощения и принципу причинности, является неоднозначным и по-прежнему представляет интересную научную задачу.

В данной работе предложен новый подход, позволяющий, исходя из известной зависимости поглощения от частоты, рассчитать функцию памяти в интегральном законе поглощения. В рамках развитого метода зависимость поглощения от частоты может не описываться аналитическим

выражением, а, например, может быть получена в эксперименте или иметь сложный вид, когда не удастся рассчитать дисперсию скорости звука на основе локальных дисперсионных соотношений. В работе получена система уравнений для одномерных встречных волн, описывающая эффекты нелинейности, поглощения и дисперсии. Развита конечно-разностный алгоритм для численного моделирования полученной системы. Точность алгоритма протестирована на примере решения ряда задач акустики, имеющих аналитическое решение. Получены новые результаты в задаче о распространении нелинейного импульса в среде типа биологической ткани и его отражения от мягкой границы.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

2.1. Метод построения причинного интегрального оператора для степенного закона поглощения

Будем описывать одномерное волновое движение в нелинейной среде с памятью системой уравнений типа гидродинамики для акустических волн:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(\rho_0 + \rho')u], \quad (3)$$

$$p' = c_0^2 \int_0^{+\infty} S(t') \rho'(t-t') dt' + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon - 1}{\rho_0} c_0^2 \rho'^2, \quad (4)$$

где ρ' и p' – отклонения плотности и давления от равновесных значений: $\rho = \rho_0(x) + \rho'$, $p = p_0 + p'$; u – колебательная скорость частиц среды; $\rho_0(x)$ – равновесная плотность среды, $c_0(x)$ – скорость звука в среде, ε – параметр акустической нелинейности среды. Уравнение состояния (4) записано в виде свертки во временной области. Здесь и далее ядро $S(\tau)$ в интегральном законе поглощения (4) будем называть функцией памяти рассматриваемой среды. Линеаризуя систему уравнений (2)–(4) для однородной среды, сведем полученную систему к волновому уравнению относительно возмущения плотности среды ρ' :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_0^{+\infty} S(t') \rho'(t-t') dt' \right] = 0. \quad (5)$$

Предложенный здесь способ получения дисперсионного уравнения для (5) и на его основе восстановления вида ядра $S(t)$ в интегральном соотношении (4) заключается в следующем. Будем искать решение (5) в виде бегущей волны

$$\rho' = \rho'_0 \exp(-i(\omega t + kx)), \quad (6)$$

где комплексное волновое число k имеет вид

$$k(\omega) = k'(\omega) + ik''(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)} + i\alpha(\omega). \quad (7)$$

Здесь $k''(\omega) = \alpha(\omega)$ описывает частотную зависимость закона поглощения, а $c(\omega)$ — закон дисперсии. Подстановка выражения (6) для возмущения плотности ρ' в волновое уравнение (5) дает дисперсионное соотношение

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c_0} S^{-0.5}(\omega), \quad (8)$$

где $S(\omega)$ определяется, с учетом принципа причинности, как

$$S(\omega) = \int_0^{+\infty} S(t') e^{i\omega t'} dt'. \quad (9)$$

Приравнивая правые части соотношений (7) и (8) для волнового числа k , получим выражение для функции памяти $S(\omega)$ в частотном представлении:

$$S(\omega) = \left(\frac{c_0}{c(\omega)} + i \frac{c_0 \alpha(\omega)}{\omega} \right)^{-2}. \quad (10)$$

Выражение (10) легко переписать в виде соотношений, выражающих поглощение $\alpha(\omega)$ и дисперсию скорости звука $c(\omega)$ через функцию памяти $S(\omega)$:

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{c_0} \operatorname{Im} \left[S^{-0.5}(\omega) \right], \quad (11)$$

$$c(\omega) = c_0 \left(\operatorname{Re} \left[S^{-0.5}(\omega) \right] \right)^{-1}.$$

В выражении (11) зависимость $c(\omega)$ неизвестна. Однако известно, что изменения скорости звука с частотой в биологических тканях небольшие [1]. Тогда будем искать $S(\omega)$ методом последовательных приближений, ограничиваясь первым приближением. Для этого поглощение $\alpha(\omega)$ и дисперсию скорости звука $c(\omega)$ представим в виде

$$\alpha(\omega) = \alpha^{(0)}(\omega) + \alpha^{(1)}(\omega) = \alpha_0 \left| \omega / \omega_0 \right|^{y+1} + \Delta\alpha(\omega), \quad (12)$$

$$\Delta\alpha(\omega) \ll \alpha_0,$$

$$c(\omega) = c^{(0)} + c^{(1)}(\omega) = c_0 + \Delta c(\omega), \quad \Delta c(\omega) \ll c_0.$$

Если теперь подставить соотношения (12) для поглощения $\alpha(\omega)$ и дисперсии скорости звука $c(\omega)$ в выражение для $S(\omega)$ (10), то, после ряда преобразований в приближении, что длина затухания намного больше длины волны рассматриваемого излучения, $\alpha(\omega) \ll \omega/c(\omega)$, перейдем к выражению

$$S(\omega) = 1 - 2i \frac{c_0 \alpha(\omega)}{\omega} + 2 \frac{\Delta c(\omega)}{c_0} - 2i \frac{\Delta\alpha(\omega) c_0}{\omega}. \quad (13)$$

В выражении (13) первые два слагаемых представляют собой нулевое приближение $S^{(0)}(\omega)$, выражающее отсутствие дисперсии скорости звука $\operatorname{Re}\{S^{(0)}(\omega)\}$ и заданную зависимость поглощения на длине волны от частоты $\operatorname{Im}\{S^{(0)}(\omega)\}$. Два последних слагаемых описывают относительную поправку к равновесной скорости звука $\Delta c(\omega)/c_0$, выражаю-

щую закон дисперсии $\operatorname{Re}\{S^{(1)}(\omega)\}$, и искусственную добавку $\Delta\alpha(\omega)c_0/\omega$ к закону поглощения на длине волны $\operatorname{Im}\{S^{(1)}(\omega)\}$. Таким образом, выражение (13) представляет собой первое приближение для $S^{(1)}(\omega)$.

Перейдем теперь непосредственно к построению причинного ядра $S(t')$ в интегральном законе поглощения, используя метод последовательных приближений, который состоит из двух шагов. На первом шаге, если пренебречь дисперсией скорости звука и использовать в соотношении (10) выражение (1) для поглощения, то получим

$$S(\omega) = \left(1 + ic_0 \alpha_0 |\omega|^y \operatorname{sign}(\omega) \right)^{-2}. \quad (14)$$

Выражение (14) представляет собой нулевое приближение $S^{(0)}(\omega)$. Однако такое выражение не удовлетворяет принципу причинности. В этом легко убедиться, если сделать обратное преобразование Фурье формулы (14), т.е. перейти от частотного представления функции памяти $S(\omega)$ к временному $S(t')$:

$$S(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega = \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + ic_0 \alpha_0 |\omega|^y \operatorname{sign}(\omega) \right)^{-2} e^{-i\omega t'} d\omega.$$

Из полученного выражения видно, что функция памяти $S(t') \neq 0$ при $t' < 0$. Интеграл (15) аналитически удастся восстановить в редких случаях, поэтому будем рассчитывать функцию $S(t')$ численно на узлах сетки по времени $\tau_n = \tau n$:

$$S(\tau_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \operatorname{sinc}(0.5\omega\tau) \exp(-i\omega\tau n) d\omega, \quad (16)$$

где $n = 0, N-1, N$ — количество узлов сетки, используемое в вычислениях функции памяти $S(\tau_n)$, а τ — временной шаг сетки. Поскольку функция памяти является действительной величиной, ее спектр $S(-\omega) = S^*(\omega)$. Используя это свойство, получим

$$S(\tau n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} 2 \operatorname{Re}(S(\omega) e^{-i\omega\tau n}) \operatorname{sinc}(0.5\omega\tau) d\omega = \quad (17)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1 - \alpha_0^2 c_0^2 |\omega|^{2y}}{(1 + \alpha_0^2 c_0^2 |\omega|^{2y})^2} \cos(\omega\tau n) - \right.$$

$$\left. - 2 \frac{\alpha_0 c_0 |\omega|^y \operatorname{sign}(\omega)}{(1 + \alpha_0^2 c_0^2 |\omega|^{2y})^2} \sin(\omega\tau n) \right] \operatorname{sinc}(0.5\omega\tau) d\omega.$$

На втором шаге для удовлетворения принципа причинности будем считать, что в выражении (17) при $\tau < 0$ функция памяти $S(\tau_n) = 0$. Если те-

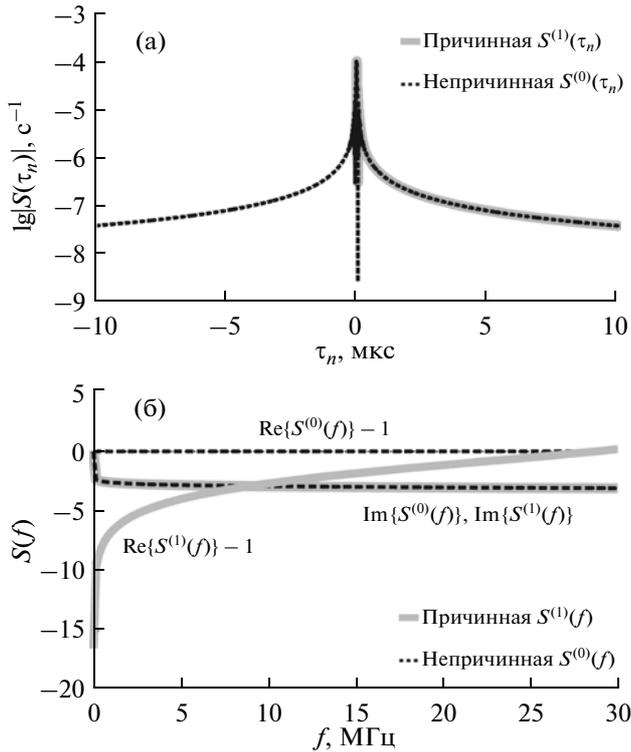


Рис. 1. Зависимости абсолютных значений не причинной $S^{(0)}(\tau_n)$ (черная пунктирная кривая) и причинной $S^{(1)}(\tau_n)$ (серая сплошная кривая) функций памяти от времени (а). Зависимости реальных и мнимых частей не причинной $S^{(0)}(f)$ (черная пунктирная кривая) и причинной $S^{(1)}(f)$ (серая сплошная кривая) функций памяти от частоты (б).

перь сделать прямое преобразование Фурье выражения (17) с учетом, что $S(\tau n) = 0$ при $\tau < 0$, то будет восстановлена причинная функция памяти $S^{(1)}(\omega)$ в первом приближении. Рис. 1 иллюстрирует поведение не причинной $S^{(0)}$ (пунктирная черная кривая) и причинной $S^{(1)}$ (сплошная серая кривая) функций памяти в частотном и временном представлениях. На рис. 1б функция памяти $S(f)$ изображена в зависимости от частоты $f = \omega/2\pi$. Закон поглощения выбирался в виде $\alpha = \alpha_0/f/f_0|^{1.05}$, коэффициент поглощения α_0 на частоте 1 МГц составлял 0.45 дБ/см, а скорость звука $c_0 = 1578$ м/с, что соответствует экспериментальным данным для печени [1]. Из рис. 1б видно, что различие между кривыми $\text{Re}\{S^{(0)}(f)\}$ (дисперсия отсутствует) и $\text{Re}\{S^{(1)}(f)\}$ (дисперсия учитывается в (13) в виде относительной поправки к равновесной скорости звука) составляет менее 1.5%. Кривая $\text{Im}\{S^{(0)}(f)\}$, описывающая точный закон поглощения на длине волны от частоты (13), и кривая $\text{Im}\{S^{(1)}(f)\}$, отвечающая за появление искусственной добавки к закону поглощения, практически неотличимы в диапазоне частот от 0 до 35 МГц. В результате, ис-

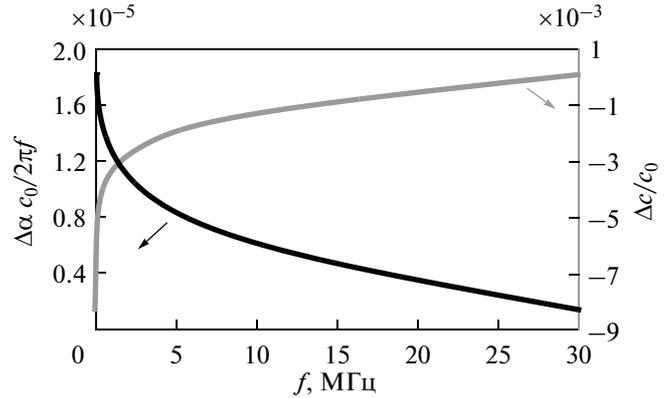


Рис. 2. Относительная поправка к равновесной скорости звука $\Delta c(f)/c_0$ (серая кривая) и искусственная добавка $\Delta\alpha(f)c_0/f$ (черная кривая) к закону поглощения на длине волны в зависимости от частоты в диапазоне от 0 до 30 МГц.

ходя из рис. 1б, можно получить относительную поправку к равновесной скорости звука $\Delta c(f)/c_0$ как половинную разность реальных частей спектров функций памяти в первом и нулевом приближениях $0.5(\text{Re}\{S^{(1)}(f)\} - \text{Re}\{S^{(0)}(f)\})$ и искусственную добавку $\Delta\alpha(f)c_0/f$ к закону поглощения на длине волны согласно выражению $0.5(\text{Im}\{S^{(1)}(f)\} - \text{Im}\{S^{(0)}(f)\})$, зависимость которых иллюстрирует рис. 2. Из рис. 2 видно, что относительная поправка к равновесной скорости звука (серая кривая), выражающая закон дисперсии, составляет менее 1%. При этом искусственная добавка к закону поглощения на длине волны (черная кривая) — меньше 2×10^{-5} в диапазоне частот от 0 до 30 МГц, т.е. ошибка, вносимая в точный закон поглощения, мала. Таким образом, развитый здесь метод построения причинного ядра $S(t')$ в интегральном законе поглощения в первом порядке метода последовательных приближений дает хорошую точность для сред типа биологической ткани и применим для описания эффектов поглощения и дисперсии в слабодиспергирующих средах.

Таким образом, в нулевом приближении закон поглощения $\alpha(\omega)$ является точным, дисперсия отсутствует, но функция памяти $S^{(0)}$ не отвечает принципу причинности (14), (15). В первом приближении, чтобы удовлетворить принцип причинности, функция памяти $S^{(0)}(t')$ искусственно зануляется при $t' < 0$, и автоматически получается причинный вид функции памяти $S^{(1)}$. Как результат, появляется поправка $\Delta c(\omega)$ к равновесной скорости звука и искусственная добавка $\Delta\alpha(\omega)$ к закону поглощения, которая составляет меньше одного процента в диапазоне частот от 0 до 30 МГц. Уравнения (2)–(4) с причинным ядром (17) ис-

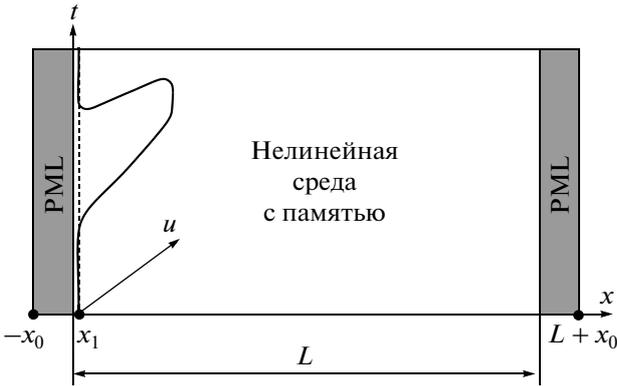


Рис. 3. Схематическое изображение системы координат, используемой в моделировании, с начальными и граничными условиями. Вертикальная пунктирная линия указывает положение внутреннего источника, а примыкающая к ней сплошная кривая показывает пример зависимости граничного условия от времени в виде одиночного импульса давления.

пользуются далее для построения численной модели.

2.2. Численная модель

В работе численно решалась система уравнений (2)–(4) на отрезке $(-x_0; L + x_0)$ с нулевыми начальными условиями (рис. 3):

$p'(x, t = 0) = 0, u(x, t = 0) = 0, \rho'(x, t = 0) = 0.$ (18)
 В качестве граничных условий, в зависимости от задачи, использовалась жесткая (19а) или мягкая (19б) граница:

$$u(x = x_r, t) = 0, \frac{\partial p}{\partial x}(x = x_r, t) = 0, \quad (19a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = x_r, t) = 0, p(x = x_r, t) = 0, \quad (19b)$$

$$\rho'_{q+1/2, s+1/2} = \rho'_{q+1/2, s-1/2} - \tau \frac{(\rho_{q-1/2, s-1/2} + \rho_{q+1/2, s-1/2})u_{q, s} - (\rho_{q+1/2, s-1/2} + \rho_{q+3/2, s-1/2})u_{q+1, s}}{2h}, \quad (22)$$

$$\rho'_{q+1/2, s+1/2} = c_0^2 \sum_{n=0}^{N-1} \rho'(x_{q+1/2}, t_{s+1/2} - \tau n) S(\tau n) + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon - 1}{\rho_0^{q+1/2}} c_0^2 \rho_{q+1/2, s-1/2}^2, \quad (23)$$

где τ – временной шаг сетки, h – шаг по пространственной координате. В выражениях (21), (22) для каждого узла сетки $x_{q-1/2, s-1/2}$ величина плотности равна $\rho_{q-1/2, s-1/2} = \rho_0(x_{q-1/2}) + \rho'_{q-1/2, s-1/2}$.

Алгоритм реализуется таким образом, что на каждом шаге по времени сначала решается разностное уравнение (22) для нахождения возмущенной плотности $\rho'_{q+1/2, s+1/2}$ (рис. 4а). Затем по

где $x_r = -x_0$ или $L + x_0$ – граница рассматриваемой области.

Для моделирования волны, свободно уходящей на бесконечность, вблизи границы рассматриваемой области $(-x_0; L + x_0)$ ставились так называемые PML-слои (идеально согласованные слои) [23], которые обеспечивали безотражательное распространение падающей на них волны и соответствовали отрезкам $(-x_0; 0)$ и $(L; L + x_0)$. Длина x_0 PML-слоя составляла доли процента от длины рассматриваемого отрезка $(-x_0; L + x_0)$. Численный алгоритм реализовывался таким образом, что в некоторой точке x_1 задавался внутренний источник ультразвуковых волн в виде импульса определенной формы $u(x_1, t)$.

2.3. Численный алгоритм

Для использования конечно-разностного метода при моделировании системы уравнений (2)–(4) с ядром (17) в уравнении состояния функция $u(x, t)$ задавалась в узлах сетки по пространственной координате x и временной координате t как $u_{q, s}$, а $\rho'(x, t)$ – в узлах сетки, смещенной на половину шага, как $\rho'_{q-1/2, s-1/2}$ и $\rho'_{q+1/2, s-1/2}$:

$$u_{q, s} = u(x_q, t_s), \quad p'_{q-1/2, s-1/2} = p'(x_{q-1/2}, t_{s-1/2}), \quad (20)$$

$$\rho'_{q-1/2, s-1/2} = \rho'(x_{q-1/2}, t_{s-1/2}).$$

После замены производных в системе уравнений (2)–(4) разностными слагаемыми система будет иметь вид

$$u_{q+1, s+1} = u_{q+1, s} - \tau \frac{2}{\rho_{q+1/2, s+1/2} + \rho_{q+3/2, s+1/2}} \times \times \frac{p'_{q+3/2, s+1/2} - p'_{q+1/2, s+1/2}}{h} - \tau \frac{u_{q+2, s}^2 - u_{q, s}^2}{4h}, \quad (21)$$

всей ее временной истории в виде предыдущих N шагов ищется акустическое давление $p'_{q+1/2, s+1/2}$ из выражения (23). На последнем этапе по известным значениям $\rho'_{q+1/2, s+1/2}$ и $p'_{q+1/2, s+1/2}$ ищется величина колебательной скорости $u_{q+1, s+1}$ из разностного уравнения (21) (рис 4б).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Ниже представлены результаты использования предложенного метода для построения причинной функции памяти и моделирования системы уравнений (21)–(23), иллюстрирующие эффекты распространения волны в двух направлениях, нели-

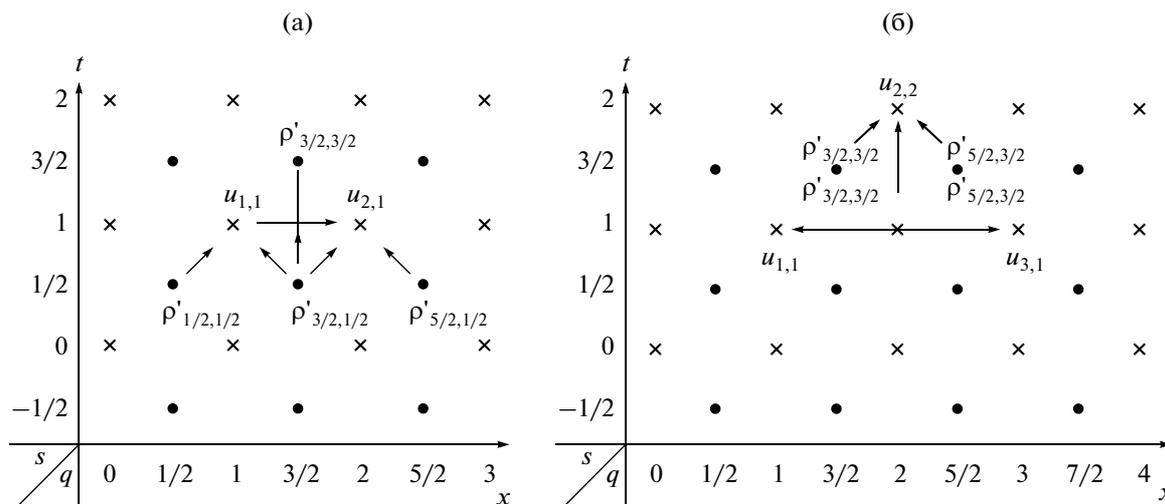


Рис. 4. Схема построения решения на смещенных сетках для нахождения возмущенной плотности (а) и колебательной скорости (б).

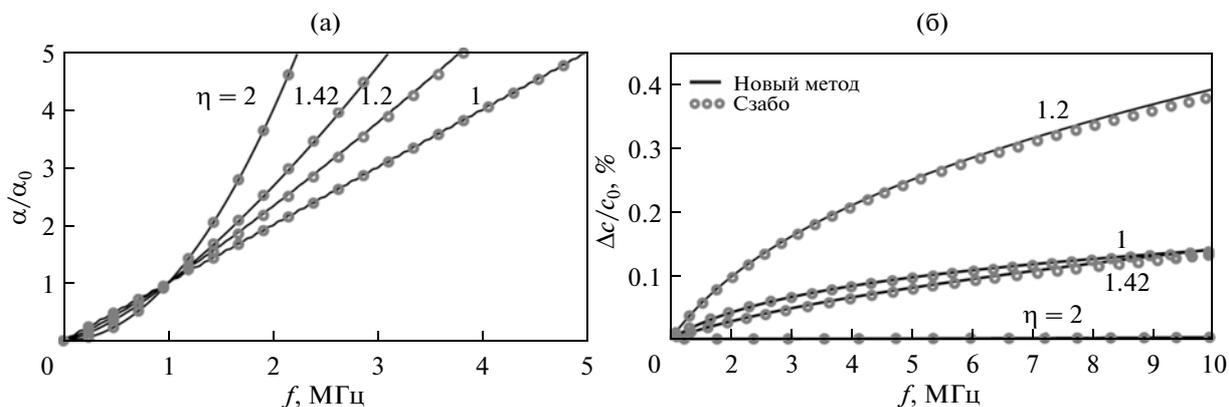


Рис. 5. Зависимости коэффициента поглощения $\alpha(f)$, нормированного на значение α_0 при 1 МГц, и относительного изменения скорости звука $\Delta c(\omega)/c_0$ для сред с различным показателем степени η (цифры у кривых), рассчитанные предложенным в данной работе методом (сплошная кривая) и на основе локальных дисперсионных соотношений, развитых в работах Сзабо (кружки).

нейности, поглощения, дисперсии и отражения от импедансной границы. Разработанный алгоритм протестирован на примере двух известных модельных задач: распространение одиночного импульса в вязкой теплопроводящей среде, демонстрирующее точность представления оператора поглощения на сетке и отсутствие схемной вязкости и дисперсии; а также нелинейное распространение плоской волны, иллюстрирующее точность описания разностного оператора нелинейности. Далее рассмотрена задача о влиянии различных физических эффектов на формирование структуры профиля волны: распространение однополярного импульса в нелинейной среде с памятью и в среде без памяти при отражении от мягкой акустической границы. Исследована задача отражения ударно-волнового импульса от

мягкой акустической границы, имитирующая ситуацию отражения ультразвуковых волн с ударными фронтами от пузырька пара, образующегося в фокусе излучателей ультразвуковой хирургии при вскипании ткани. Такая ситуация реализуется в задачах применения мощного фокусированного ультразвука в неинвазивной хирургии и представляет интерес для исследования соответствующих механизмов разрушения биологической ткани. В основном, все расчеты проводились с шагом по времени $\tau = 300$ пс и координате $h = 0.5$ мкм.

Рис. 5 иллюстрирует зависимости коэффициента поглощения $\alpha(f)$, нормированного на значение α_0 при 1 МГц, и изменения скорости звука $\Delta c(\omega)/c_0$ для сред с различным показателем степени η , рассчитанные данным методом (сплошная

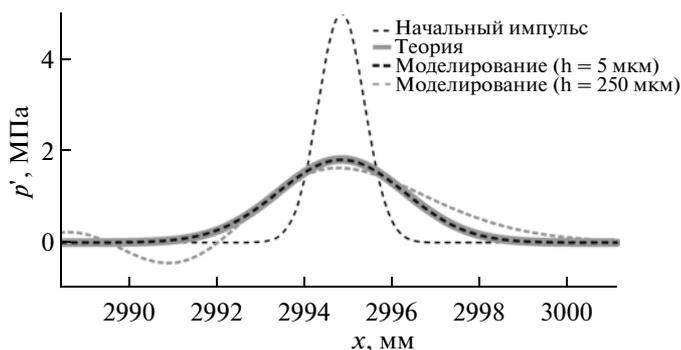


Рис. 6. Сравнение точного (сплошная серая кривая) и численного (пунктирная черная кривая) решений для исходного гауссового импульса (тонкая пунктирная черная линия) с амплитудой $p_0 = 5$ МПа и длительностью 1 мкс после распространения на расстояние 3 м в среде с коэффициентом поглощения $\alpha_0 = 0.45$ дБ/см на частоте 1 МГц при различных шагах сетки $h = 5$ мкм и $h = 250$ мкм.

кривая) и на основе локальных дисперсионных соотношений, развитых в работах Сзабо (кружки) [1, 16]. Кривые на рисунке построены для крови ($\eta = 1.42$, $\alpha_0 = 0.22$ дБ/см, $c_0 = 1570$ м/с), печени ($\eta = 1.2$, $\alpha_0 = 0.71$ дБ/см, $c_0 = 1600$ м/с) [1], воды ($\eta = 2$, $\alpha_0 = 0.0025$ дБ/см, $c_0 = 1500$ м/с) и бутандиола ($\eta = 1$, $\alpha_0 = 0.33$ дБ/см, $c_0 = 1546$ м/с). На рис. 5а зависимости для коэффициента поглощения $\alpha(f)$ показаны без учета (кружки) и с учетом поправки к закону поглощения $\Delta\alpha(f)$ (сплошная линия), отвечающей принципу причинности.

Из рис. 5б видно, что дисперсия скорости звука действительно мала и составляет менее 1% в мягких тканях в диапазоне от 1 до 10 МГц, а в случае классического квадратичного поглощения отсутствует. Различие в определении закона дисперсии в рамках двух подходов составляет доли процента. В отличие от модели локальных дисперсионных соотношений Сзабо, где дисперсионные кривые удается рассчитать для определенного вида закона поглощения, развитый здесь метод позволяет рассчитать дисперсию скорости звука по произвольному закону поглощения, который может иметь сложный вид либо не иметь аналитического выражения, например, будучи полученным в эксперименте.

На рис. 6 представлены результаты моделирования, описывающие расплывание гауссовского импульса с амплитудой $p_0 = 5$ МПа в линейной среде с квадратичным частотным законом поглощения $\eta = 2$. Видно, что численные расчеты с достаточно малыми шагами сетки (пунктирная черная кривая) хорошо согласуются с известным аналитическим решением линеаризованного уравнения Бюргерса в виде свертки функции Грина точечного источника с исходным возмущени-

ем с гауссовым профилем $p'(x = 0, t) = p'_0(t)$ (сплошная серая кривая) [1]:

$$p'(x, t) = p_0 \left(1 + \frac{4\delta x}{T_0^2} \right)^{-0.5} \exp \left[-\frac{(t - x/c_0)^2}{T_0^2 + 4\delta x} \right], \quad (24)$$

где $\delta = \alpha_0 / (8.686 \omega_0^2) = 0.13 \times 10^{-12} \text{ с}^2 \text{ м}^{-1}$ — коэффициент поглощения звука, соответствующий квадратичному закону поглощения от частоты $\alpha = \alpha_0 (\omega / \omega_0^2)$. Здесь коэффициент α_0 на частоте $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 1$ МГц составлял 0.45 дБ/см, как в биологической ткани; длительность импульса $2T_0 = 1$ мкс; скорость звука $c_0 = 1500$ м/с, длина затухания, на которой амплитуда импульса уменьшается в e раз, составляет около 3 м.

В данной задаче для расчета плавного волнового профиля шаг по координате h выбирался равным 5 мкм, а шаг по времени $\tau = 3$ нс в соответствии с критерием Куранта. При ширине исходного гауссового импульса (пунктирная черная кривая) 1.5 мм это соответствовало примерно 300 точкам на ширину исходного импульса. Видно, что такая дискретизация была достаточна, чтобы при распространении на расстояние около 2000 ширины исходного импульса (3 м), соответствующее одной длине затухания, не проявились эффекты схемной вязкости и дисперсии. На рисунке также приведено решение при больших шагах сетки $h = 250$ мкм и $\tau = 30$ нс (пунктирная серая кривая), иллюстрирующих влияние схемной вязкости и дисперсии. При выборе шага $h = 5$ мкм отличие от точного решения на расстоянии около 2000 ширины исходного импульса (3 м) составило чуть меньше половины процента, а при в 50 раз большем шаге ($h = 250$ мкм) — около 27%.

Если рассматривать задачу о нелинейном однонаправленном распространении нелинейных волн Римана, то для нее существует точное решение, описываемое уравнением простых волн, которое следует из системы уравнений Эйлера в случае адиабатического уравнения состояния и в приближении малых чисел Маха:

$$p' = \Phi \left(t \mp x c_0^{-1} + \varepsilon \rho_0^{-1} c_0^{-3} p' x \right), \quad (25)$$

где функция $\Phi(t) = p'(x = 0, t)$ задает временной профиль волны на входе в нелинейную среду. Выражение (25) описывает невзаимодействующие волны, бегущие как в положительном, так и в отрицательном направлении оси x , верхние знаки соответствуют волне, бегущей вправо.

Результаты моделирования однонаправленного распространения простой волны, бегущей в положительном направлении x (вправо), показаны на рис. 7. Исходный импульс имел гауссову форму $p'(x = 0, t) = p_0 \exp(-t^2/T_0^2)$ с амплитудой $p_0 = 5$ МПа и длительностью $2T_0 = 1$ мкс, параметры нелинейной среды c_0 , ρ_0 , ε были близки к па-

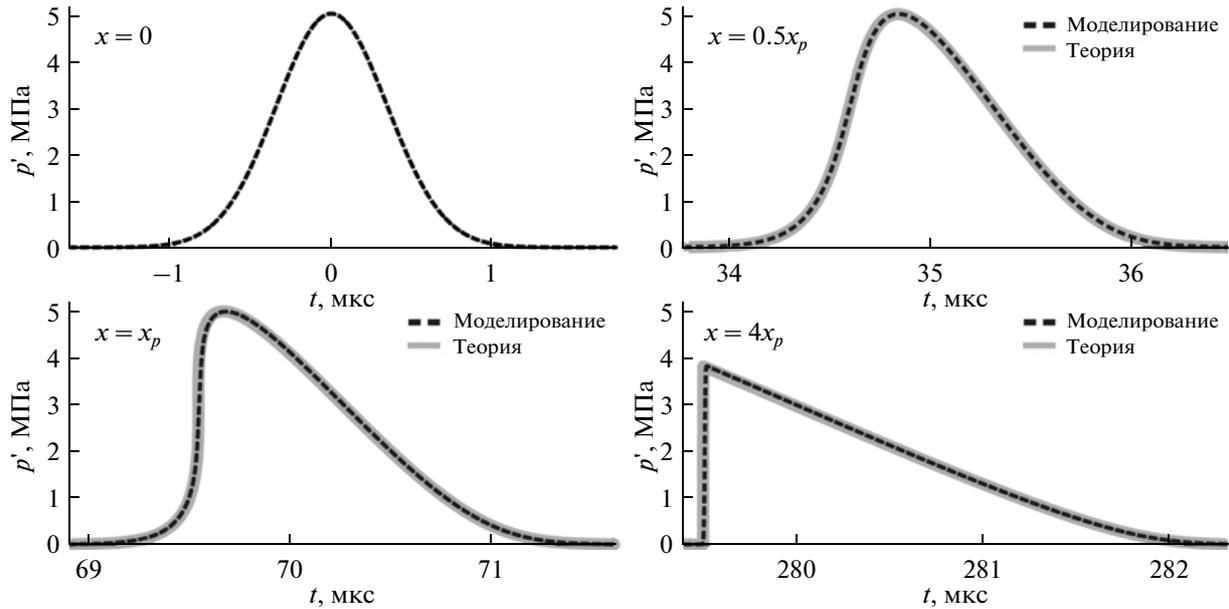


Рис. 7. Искажение исходного гауссового импульса с амплитудой $p_0 = 5$ МПа и длительностью 1 мкс при распространении в нелинейной среде с коэффициентом нелинейности $\epsilon = 4.38$: численный расчет (пунктирные черные кривые) и аналитическое решение (сплошные серые кривые) уравнения простых волн.

раметрам биологической ткани ($c_0 = 1578$ м/с, $\rho_0 = 1060$ кг/м³, $\epsilon = 4.38$) [1]. Сплошные кривые на рисунке рассчитаны численно на основе развитого здесь алгоритма и совмещены с пунктирными кривыми, полученными на основе точного решения уравнения простых волн

$$p' = p_0 \exp \left\{ - \left(\frac{\tau + \epsilon \rho_0^{-1} c_0^{-3} p' x}{T_0} \right)^2 \right\}. \quad (26)$$

В выражении (26) переменная $\tau = t - x/c_0$ – время в бегущей системе координат. Если перейти от неявного решения $p'(x, \tau)$ к явному $\tau(x, p')$ в формуле (26), то получим

$$\tau = T_0 \sqrt{\ln(p_0/p')} - (\epsilon/\rho_0 c_0^3) p' x. \quad (27)$$

Для построения решения нужно просто сложить исходный профиль волны $\tau = \Phi^{-1}(p') = T_0 \sqrt{\ln(p_0/p')}$ с линейной функцией $\Delta\tau = -(\epsilon/\rho_0 c_0^3) p' x$.

Как известно из теории и подтверждается численным расчетом, по мере распространения участки с более высоким положительным давлением распространяются быстрее и как следствие “набегают” на участки с менее высоким давлением, скорость которых меньше. В результате этого участки с увеличивающимся давлением становятся более крутыми, а участки со спадающим давлением, – напротив, более пологими. Как видно из

рис. 7, на расстоянии $x_p = \sqrt{\frac{\epsilon \rho_0 c_0^3 T_0}{2 \epsilon p_0}}$, что при данных параметрах задачи соответствовало 11.1 см, касательная к профилю в точке $\tau_p = T_0/\sqrt{2}$ стано-

вится вертикальной, а при дальнейшем увеличении расстояния возникает неоднозначность – “перехлест”.

На рис. 7 подобный профиль изображен для расстояния $x = 4x_p$ с учетом “правила равных площадей”, отсекающего участки неоднозначности, в результате чего профиль приобретает треугольную форму. Как видно, профили, рассчитанные численно (пунктирные черные кривые), практически наложился на профили, имеющие аналитическое решение в виде волн Римана (сплошные серые кривые) с одним характерным отличием: разрыв волны с точным римановским решением и учетом правила равенства площадей – вертикальный, а для численного профиля ударный фронт имеет конечную ширину. Данное расхождение связано с невозможностью описания волновых решений с математическими разрывами в рамках конечно-разностного метода: заданные момент времени и точка пространства должны единственным образом определять параметры p', u, ρ' . Поэтому при численных расчетах для построения решения с разрывным фронтом рассматривалась нелинейная вязкая среда с малой квадратичной по частоте вязкостью, сглаживающей ударный фронт. Для данной задачи выбирались следующие параметры такой среды: коэффициент поглощения α_0 на частоте 1 МГц составлял 10^{-2} дБ/см, скорость звука $c_0 = 1578$ м/с, плотность среды $\rho_0 = 1060$ кг/м³, параметр акустической нелинейности $\epsilon = 4.38$, что при шаге по времени $\tau = 0.3$ пс соответствовало

80 точкам на ударный фронт. Видно, что такой дискретизации было достаточно для описания распространения волны на расстояние четырех длин образования разрыва или 277 длин исходного импульса без проявления схемной вязкости и искажения разрывной формы импульса.

На рис. 8 показаны результаты моделирования нелинейного распространения двух встречных импульсов в различные моменты времени t . Расстояние между исходными импульсами составляло $8x_p$ (88.8 см), их амплитуда, длительность, форма, а также параметры среды были выбраны, как и в случае однонаправленного распространения (рис. 7). Пунктирные черные кривые на рисунке рассчитаны численно на основе развитого здесь алгоритма и совмещены со сплошными серыми кривыми, являющимися суперпозицией двух точных решений уравнения простых волн, соответствующих распространению импульсов в противоположных направлениях (25). Столкновение импульсов начинается в момент времени $t = 279.4$ мкс. В момент времени $t = 279.51$ мкс, при перекрытии импульсов, рассчитанные численно профили наложился на профили, представляющие собой аналитическое решение в виде суперпозиции не взаимодействующих волн Римана. После взаимодействия, в момент времени $t = 286.58$ мкс, суммарный импульс распадается на два, совпадающих по форме с импульсами до взаимодействия. Таким образом, несмотря на нелинейность процесса, при рассмотренной здесь амплитуде импульсов 5 МПа происходит независимое прохождение одного импульса через другой.

На рис. 9 показаны результаты моделирования распространения нелинейного импульса с исходной гауссовой формой, амплитудой $p_0 = 3.3$ МПа и длительностью 5 мкс в среде с памятью ($\eta = 1.05$, $\alpha_0 = 0.45$ дБ/см, $c_0 = 1578$ м/с, $\rho_0 = 1060$ кг/м³) (сплошные кривые) и в маловязкой среде ($\eta = 0$, $c_0 = 1578$ м/с, $\rho_0 = 1060$ кг/м³) (пунктирные кривые) при отражении от мягкой акустической границы. Рисунок иллюстрирует профили волн, бегущих в прямом направлении x (профили (1), (2), (3)), и после отражения – в обратном направлении (профили (4), (5), (6)). Как видно, для $x = x_p$ при распространении в среде с памятью ударный характер прямой волны (профиль (2)) сохраняется, однако его форма отличается от случая распространения в среде без потерь: амплитуда импульса меньше, а ударный фронт образуется позже.

При $x = 2x_p$ процесс релаксации приводит к тому, что вид профиля (3) за ударным фронтом значительно округляется. При отражении от мягкой границы импульс меняет полярность, фаза сжа-

тия переходит в фазу разрежения (профиль (4)), а при $x = 3x_p$ ударный фронт для волны, бегущей влево (5), размывается. Наконец, при $x = 4x_p$ импульс (6) становится более заостренным в фазе разрежения, заметно укрупнение его заднего фронта.

На рис. 10 показан пример отражения ударно-волнового импульса, состоящего из нескольких периодов, от мягкой границы – аналога кавитационного облака либо паросодержащего пузыря кипения, образующихся в биологической ткани при воздействии мощным фокусированным ультразвуком с целью механического разрушения биологической ткани (гистотрипсии) [24, 25]. Профиль импульса соответствует полученному в эксперименте: исходная амплитуда ударного фронта импульса составляет 50 МПа, частота – 2 МГц, а длительность – 4 мкс [24]. Каждый из периодов импульса имеет характерную форму, соответствующую нелинейно-дифракционным искажениям профиля волны в фокусе мощного ультразвукового пучка: высокий узкий пик положительного давления за ударным фронтом и плавную фазу разрежения с существенно меньшей амплитудой. В качестве среды распространения рассматривалась нелинейная среда без потерь с коэффициентом нелинейности $\varepsilon = 1$, скоростью звука $c_0 = 1578$ м/с, плотностью $\rho_0 = 1060$ кг/м³ (черная пунктирная кривая) и нелинейная среда со степенным законом поглощения с показателем $\eta = 1.05$ и теми же акустическими параметрами ε , c_0 , ρ_0 (серая сплошная кривая). Видно, как за счет изменения полярности импульса при отражении происходит наложение высокоамплитудного пика на отрицательную фазу падающей волны и резкое возрастание пикового отрицательного давления (рис. 10в). Этот эффект может вызывать усиление кавитационных явлений вблизи границы и являться одним из основных механизмов механического разрушения ткани [24, 25]. Как упоминалось ранее, в случае среды со степенным законом поглощения (серая сплошная кривая), соответствующей среде с памятью, дисперсия приводит к тому, что вид профиля за ударным фронтом изменяется (фронт волны значительно округляется в фазе сжатия, положение максимума волны начинает отставать от фронта волны в положительные полупериоды – рис. 10в), вследствие чего импульс начинает значительно отставать от импульса в среде без дисперсии (черная пунктирная кривая). Отражение волны от мягкой границы приводит к изменению полярности импульса и размыванию его ударного фронта (рис. 10в, 10г).

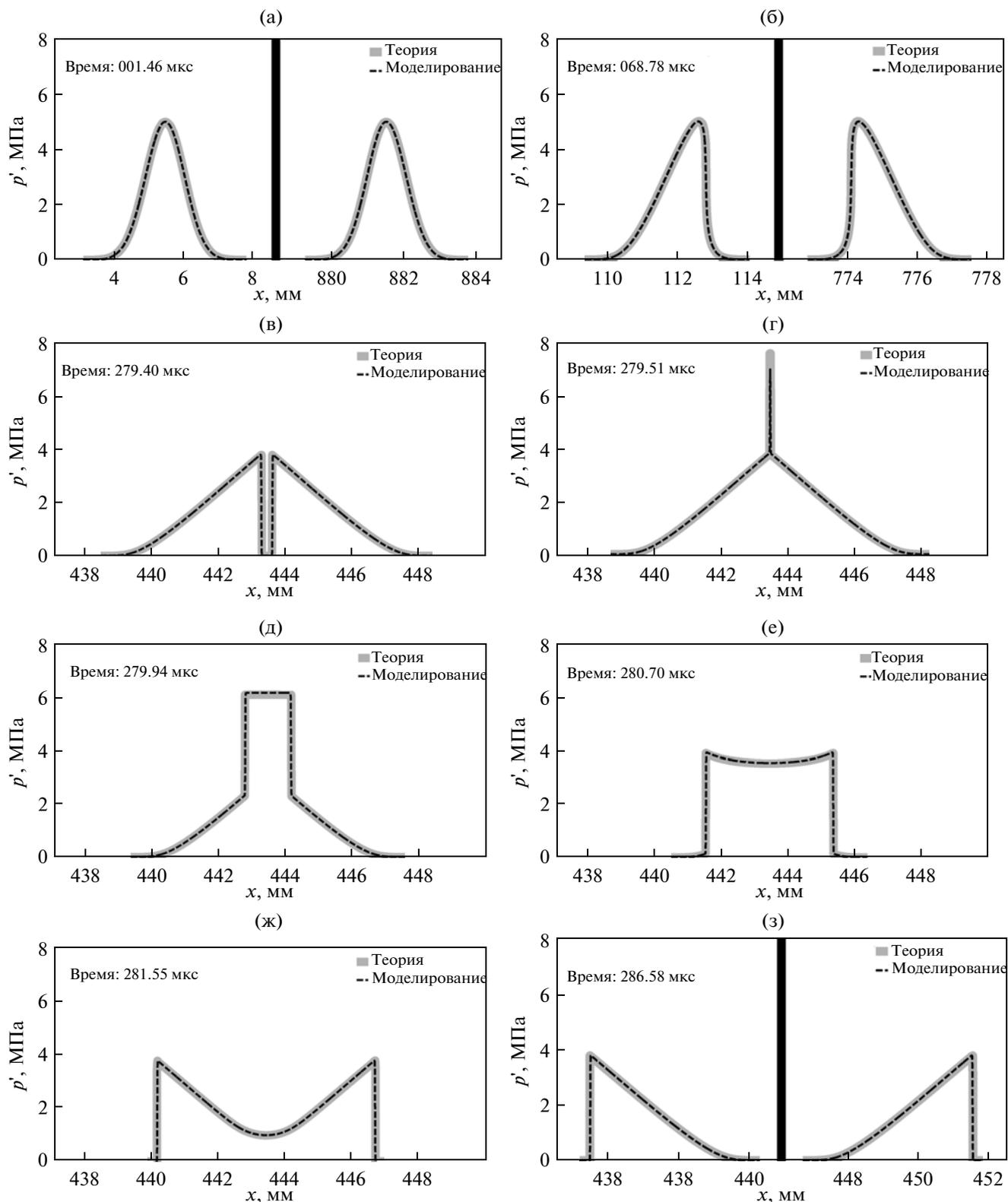


Рис. 8. Профили акустических импульсов при распространении встречных волн Римана в различные моменты времени t , соответствующие профилям импульсов, находящимся на расстоянии $8x_p$ ($t = 1.46$ мкс) (а); $6x_p$ ($t = 68.78$ мкс) (б); $0x_p$ ($t = 279.4$ мкс) (в), их взаимодействию ($t = 279.51$ мкс (г), 279.94 мкс (д), 280.7 мкс (е), 281.55 мкс (ж)) и распространению импульсов после взаимодействия ($t = 286.58$ мкс) (з).

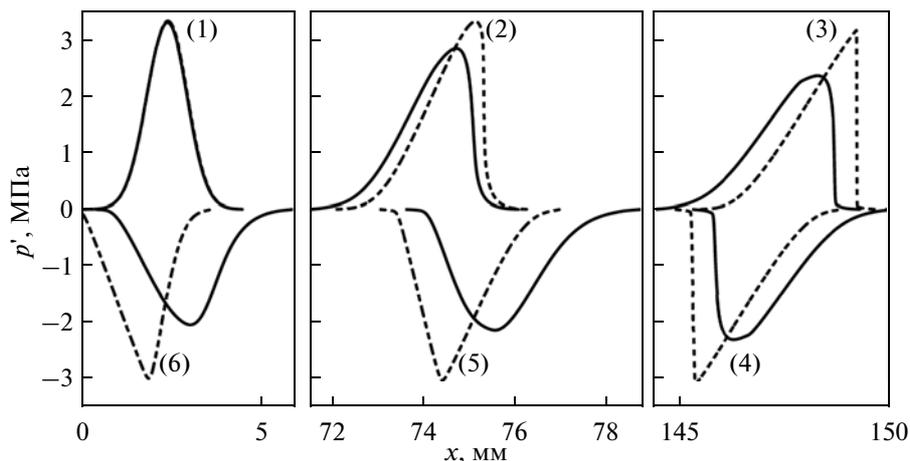


Рис. 9. Распространение исходно гауссового видеоимпульса с амплитудой $p_0 = 3.3$ МПа и длительностью 5 мкс в нелинейной среде с памятью ($\eta = 1.05$, $\alpha_0 = 0.45$ дБ/см, $c_0 = 1578$ м/с) (сплошная кривая) и в идеальной среде без потерь ($\eta = 0$, $c_0 = 1570$ м/с) (пунктирная кривая) при отражении от мягкой границы. Профили показаны на различных расстояниях: $x = 2.5$ мм (1); $x = x_p$ (x_p – расстояние образования разрыва) (2); $x = 2x_p$ (3); $x = 2x_p$ (отраженная волна) (4); $x = 3x_p$ (5); $x = 4x_p$ (6).

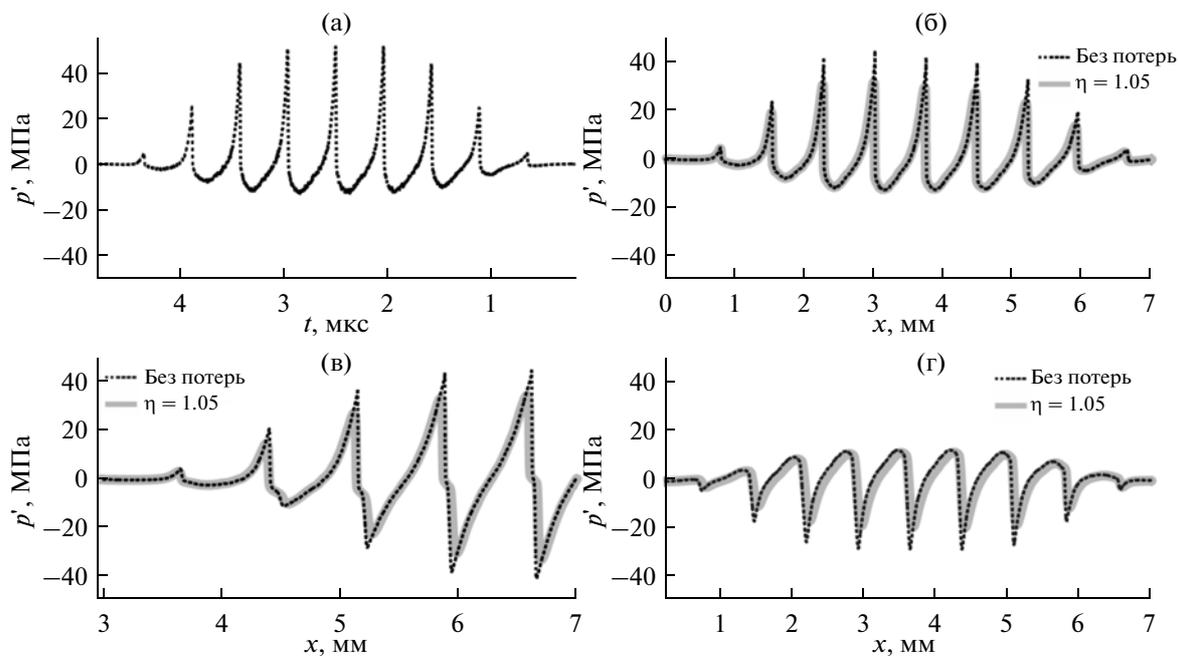


Рис. 10. Эволюция исходного ударно-волнового цуга $p'(x = 0, t)$ при $x = 0$ в нелинейной среде без потерь $\eta = 0$ (черная пунктирная кривая) (а) и в нелинейной среде со степенным законом поглощения с показателем степени $\eta = 1.05$ (сплошная серая кривая) в различные моменты времени t , соответствующие распространению в положительном направлении оси x (б); его интерференции с импульсом, отраженным от мягкой границы (в), и формирования резких пиков отрицательного давления при распространении отраженного импульса измененной полярности в обратном направлении x (г).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлен новый подход, позволяющий, исходя из известной зависимости поглощения акустических волн от частоты, рассчитать функцию памяти в интегральном законе поглощения, соответствующем принципу причин-

ности. Получена система уравнений для одномерных встречных волн, описывающая эффекты нелинейности, поглощения и дисперсии. Развита конечно-разностный алгоритм для численного описания полученной системы уравнений с учетом отражения волн от импедансной границы. Алгоритм протестирован на примере ре-

шения известных задач нелинейной акустики, имеющих аналитическое решение. Результаты тестирования показали хорошую точность алгоритма. Промоделирована задача о распространении нелинейного импульса в среде типа биологической ткани и его отражения от мягкой границы, иллюстрирующая механизм разрушения ткани при гистотрипсии.

По сравнению с известными моделями, основанными на решении нелинейных уравнений эволюционного типа, представленная здесь численная модель не имеет ограничения в виде одного выделенного направления распространения звуковой волны. Система уравнений и развитый алгоритм могут быть также использованы для описания волн в средах с распределенными в пространстве неоднородностями. Это позволит исследовать более широкий класс практически важных задач медицинской акустики, в которых необходимо учитывать эффекты отражения и рассеяния.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 12-02-31830-мол_а и 13-02-00183, Президента РФ № 14.124.13.5895-МК и фонда “Дианастия”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилл К., Бэмбер Д., тер Хаар Г. Ультразвук в медицине. Физические основы применения. М.: Физматлит, 2008. 544 с.
2. Бэйли М.Р., Хохлова В.А., Сапожников О.А., Каргл С.Г., Крам Л.А. Физические механизмы воздействия терапевтического ультразвука на биологическую ткань (обзор) // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 4. С. 437–464.
3. Руденко О.В. Нелинейные волны: некоторые биомедицинские приложения // УФН. 2007. Т. 177. № 4. С. 374–383.
4. Averkiou M.A. Tissue harmonizing imaging / in Proc. IEEE International Ultrasonics Symposium. 2000. V. 2. P. 1563–1572.
5. Хохлова В.А., Пономарев А.Е., Аверкью М.А., Крам Л.А. Нелинейные импульсные поля прямоугольных фокусированных источников диагностического ультразвука // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 4. С. 560–570.
6. Averkiou M.A., Cleveland R.O. Modeling of an electrohydraulic lithotripter with the KZK equation // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V. 106. № 1. P. 102–112.
7. Ginter S., Liebler M., Steiger E., Dreyer T., Riedlinger R. Full-wave modeling of therapeutic ultrasound: Nonlinear ultrasound propagation in ideal fluids // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 111. № 5. P. 2049–2059.
8. Филоненко Е.А., Хохлова В.А. Эффекты акустической нелинейности при терапевтическом воздействии мощного фокусированного ультразвука на биологическую ткань // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 4. P. 541–549.
9. Руденко О.В., Гурбатов С.Н. Распространение шумовых сигналов в мягких биологических тканях // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 2. С. 275–277.
10. Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Демин И.Ю. Нелинейные шумовые волны в мягких биологических тканях // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 5. С. 630–635.
11. Hallaj I.M., Cleveland R.O. FDTD simulation of finite-amplitude pressure and temperature fields for biomedical ultrasound // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V. 105. № 5. P. L7–L12.
12. Demi L., van Dongen K.W.A., Verweij M.D. A contrast source method for nonlinear acoustic wave fields in media with spatially inhomogeneous attenuation // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 129. № 3. P. 1221–1230.
13. Руденко О.В., Солуян С.И., Хохлов П.В. Проблемы теории нелинейной акустики // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 3. P. 449–457.
14. O'Donnell M., Janes E.T., Miller J.G. General relationships between ultrasonic attenuation and dispersion // J. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 63. № 6. P. 1935–1937.
15. Collins M.D. The time-domain solution of the wide-angle parabolic equation including the effects of sediment dispersion // J. Acoust. Soc. Am. 1988. V. 84. P. 2114–2125.
16. Szabo T.L. Causal theories and data for acoustic attenuation obeying a frequency power law // J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 97. № 1. P. 14–24.
17. Jongen H.A., Thijssen J.M., van den Aarssen M., Verhoef W.A. A general model for the absorption of ultrasound by biological tissues and experimental verification // J. Acoust. Soc. Am. 1986. V. 79 № 2. P. 535–540.
18. Cleveland R.O., Hamilton M.F., Blackstock D.T. Time-domain modeling of finite-amplitude sound in relaxing fluids // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99. № 6. P. 3312–3318.
19. Pinton G.F., Dahl J., Rosenzweig S., Trahey G.E. A heterogeneous nonlinear attenuating full-wave model of ultrasound // IEEE UFFC. 2009. V. 56. № 3. P. 474–488.
20. Chen W., Holm S. Fractional Laplacian time-space models for linear and nonlinear lossy media exhibiting arbitrary frequency power-law dependency // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 115. № 4. P. 1424–1430.
21. Treeby B.E., Cox B.T. Modeling power law absorption and dispersion for acoustic propagation using the fractional Laplacian // J. Acoust. Soc. Am. 2010. V. 127. № 5. P. 2741–2748.
22. Treeby B.E., Jaros J., Rendell A.P., Cox B.T. Modeling nonlinear ultrasound propagation in heterogeneous media with power law absorption using a k-space pseudospectral method // J. Acoust. Soc. Am. 2012. V. 131. № 6. P. 4324–4336.
23. Drumm I. Finite Difference Time Domain Tutorial / EPSRC Summer School. 2007.
24. Khokhlova T.D., Canney M.S., Khokhlova V.A., Sapozhnikov O.A., Crum L.A., Bailey M.R. Controlled tissue emulsification produced by high intensity focused ultrasound shock waves and millisecond boiling // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130. № 5. P. 3498–3510.
25. Maxwell A.D., Wang T.-Y., Cain C.A., Fowlkes J.B., Sapozhnikov O.A., Bailey M.R., Xu Z. Cavitation clouds created by shock scattering from bubbles during histotripsy // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130. № 4. P. 1888–1898.