

УДК 534.16

СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В РЕЗОНАТОРЕ С КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2011 г. В. Г. Андреев, Т. Б. Крит, О. А. Сапожников

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики
119991 Москва, Ленинские горы 1, стр. 2

E-mail: timofey@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 02.03.11 г.

Исследуются сдвиговые волны конечной амплитуды в одномерном резонаторе в виде слоя резиноподобной среды с жесткой пластиной конечной массы на верхней поверхности слоя. Нижняя граница слоя колеблется по гармоническому закону с заданным ускорением. Уравнение движения частиц в резонаторе находится с использованием модели среды с одним временем релаксации и кубичной зависимости сдвигового модуля от деформации. Амплитуда и форма сдвиговых волн в резонаторе рассчитываются численно методом конечных разностей на смещенных сетках. Получены резонансные кривые при различных амплитудах ускорения нижней границы слоя. Показано, что с ростом амплитуды колебаний в резонаторе значение резонансной частоты увеличивается, а форма резонансной кривой становится асимметричной. При достаточно больших амплитудах наблюдается область бистабильности. Измерения проводились с резонатором, где слой толщиной 15 мм был изготовлен из резиноподобного полимера пластисола. По экспериментальной зависимости механического напряжения от сдвиговой деформации определялся сдвиговой модуль полимера при малых деформациях и нелинейный коэффициент. Амплитуды колебаний в резонаторе достигали значений, при которых максимальные сдвиговые деформации в слое составляли 0,4–0,6, что позволяло наблюдать нелинейные эффекты. Измеренные зависимости резонансной частоты от амплитуды колебаний соответствовали расчетным, полученным при меньшем значении нелинейного коэффициента.

Ключевые слова: резиноподобные материалы, кубичная нелинейность, механический резонатор.

ВВЕДЕНИЕ

Возросший в последнее время интерес к волновым процессам в кубично нелинейных средах обусловлен возможностями применения нелинейных эффектов для целей медицинской диагностики мягких тканей [1]. Упругость ткани в пораженной области существенно изменяется, что позволяет выявлять патологию по измерению локальной скорости и затухания сдвиговых волн. Предложенные в различных работах методы неинвазивного возбуждения и детектирования сдвиговых волн продемонстрировали возможность локализации и определения неоднородностей сдвигового модуля с миллиметровым разрешением как на фантомах биологических тканей [2], так и в клинических условиях [3, 4]. Нелинейность сдвигового модуля также является информативным параметром, позволяющим уточнить диагностическую информацию, получаемую в линейных измерениях [5]. Нелинейный параметр среды может быть получен как из статических измерений, так и при измерениях параметров нелинейных волновых процессов. Особенностью сред с центром инверсии, к которым с хорошим приближением можно отнести и мягкие биоткани, является отсутствие квадратичной нелинейности при сдвиговых деформациях. В таких сре-

дах основной вклад в развитие нелинейных процессов вносит кубичная нелинейность.

Бегущие волны конечной амплитуды в средах с кубичной нелинейностью рассмотрены достаточно детально [6–8]. Показано, что в кубично нелинейной среде профиль гармонической на входе волны по мере распространения искажается симметрично, приобретая на некотором расстоянии трапециевидную форму с крутыми фронтами. В работе [9] получены аналитические выражения для спектральных характеристик простой волны в кубично нелинейной среде как на стадии ее трансформации из синусоидальной формы до образования разрывов в профиле, так и асимптотически самоподобного профиля в виде “трапециевидной пилы”. Результаты экспериментального наблюдения динамики нелинейной трансформации профиля гармонической волны в гелеобразной среде описаны в работе [10], где приведены как профили волн на различных расстояниях от источника сдвиговых волн, так и их гармонический состав. Для измерения нелинейных модулей упругости гелеобразных сред с малым значением модуля сдвига авторы работы [10] предложили использовать акусто-упругий эффект, т.е. зависимость скорости упругих волн от статической деформации среды. Теоретические основы опреде-

ления ограниченного числа нелинейных констант в несжимаемых средах описаны в [7, 11, 12]. Результаты измерений нелинейных констант в образцах, изготовленных из желатино-агаровой композиции, приведены в [13, 14].

Стоячие волны в кубично нелинейных средах в настоящее время проанализированы менее детально, хотя они представляют не меньший интерес и как объект фундаментального исследования, и с точки зрения практического применения. Теоретический анализ поведения стоячих волн в кубично нелинейной среде проведен в [15], где получены решения для волн, содержащих ударные фронты. В обзоре [16] детально рассматриваются модели и приближенные методы анализа стоячих волн в резонаторах в условиях сильно выраженной нелинейности. Анализ волн проводится для сред с квадратичной и кубичной нелинейностью, а также для нелинейности, возникающей за счет подвижности границ.

Для возбуждения стоячих волн конечной амплитуды удобно использовать резонатор в виде плоскопараллельного слоя резиноподобного материала с жесткой пластиной, закрепленной на его верхней границе. Толщина резонатора подбирается так, чтобы на ней укладывалось около четверти длины волны. В работе [17] показано, что в таком резонаторе возникают стоячие волны с амплитудами, на порядок и более превышающими амплитуду смещений, приложенных к нижней границе резонатора даже в случае использования полимерного материала с большой сдвиговой вязкостью. В качестве среды с кубичной нелинейностью используется полимерный материал пластисол (производитель – компания M-F Manufacturing, USA), нелинейный параметр в котором определялся из статической зависимости сдвиговой деформации от напряжения [18]. Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию стоячих сдвиговых волн, возбуждаемых в резонаторе, заполненном средой с кубичной нелинейностью. Анализируются волны умеренной амплитуды, когда ударные фронты еще не образуются. При этом развивается подход, основанный на модели одномерного резонатора [17, 19].

РАСЧЕТ СТОЯЧИХ ВОЛН В ОДНОМЕРНОМ РЕЗОНАТОРЕ С КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассмотрим резонатор в виде резиноподобного образца, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда высотой L с горизонтальными гранями площадью S . Нижняя грань образца прикреплена к жесткой горизонтальной пластине, совершающей гармонические колебания под действием вынуждающей силы в горизонтальном направлении, вдоль оси x . К верхней грани резонатора ($y = L$) прикреплена другая жесткая пластина массы M , площадь которой равна площади верхней грани S . Проскаль-

зывание между пластинами и горизонтальными гранями образца отсутствует. Предполагается, что толщина резонатора L значительно меньше его поперечных размеров. Указанное допущение позволяет считать движение частиц зависящим лишь от вертикальной координаты, т.е. пользоваться одномерным приближением. В работе [20] показано, что такая модель одномерного резонатора с достаточной точностью описывает поведение резонатора конечных размеров, если толщина резонатора не превышает четверти его длины в направлении x .

В работе [17] для теоретического исследования линейных колебаний в описанном выше резонаторе использована модель, учитывающая диссипативные процессы в простейшем приближении, когда механическое напряжение представляется в виде суммы упругого слагаемого, пропорционального деформации, и вязкого слагаемого, пропорционального скорости деформации (реологическая модель Кельвина-Фойгта). Оказалось, что при соответствующем подборе параметров модель позволяла хорошо описать наблюдаемые резонансные кривые, но при переходе к резонансам более высоких порядков модельную вязкость приходилось уменьшать, а упругий модуль увеличивать. В линейном случае такая подгонка параметров в окрестности исследуемого резонанса необязательна, однако в нелинейном случае появляются высшие гармоники, т.е. процесс становится широкополосным и поэтому реологическое уравнение состояния Кельвина-Фойгта оказывается неприменимым и требуется его модификация, учитывающая уменьшение вязкости и увеличение жесткости среды с ростом частоты. Простейший подход здесь связан с введением релаксационных процессов [21, 22]. При рассмотрении нелинейных колебаний также требуется модифицировать и упругий элемент в реологической модели.

Рассмотрим модель среды, в которой механическое напряжение складывается из релаксационного напряжения и упругого напряжения, пропорционального деформации. Механическая модель среды изображается параллельным соединением упругого элемента с нелинейным модулем $\mu_0 = \mu_{00}(1 + \beta\varepsilon^2)$ и максвелловского вязкоупругого элемента с вязкостью η_1 и сдвиговым модулем $\mu_1 = \eta_1/\tau$ (см. рис. 1). Здесь $\varepsilon = \partial u/\partial y$ – сдвиговая деформация, u – смещение пружинки, τ – время релаксации, μ_{00} – линейный статический модуль сдвига, β – нелинейный параметр. При деформации всей системы на величину ε в ней возникает механическое напряжение

$$\sigma = \sigma_\infty + \sigma', \quad (1)$$

которое складывается из напряжения пружинки

$$\sigma_\infty = \mu_0\varepsilon = \mu_{00}(1 + \beta\varepsilon^2)\varepsilon \quad (2)$$

и напряжения максвелловской схемы σ' . Выразим напряжение максвелловской схемы через деформацию пружинки $\varepsilon_A = \sigma'/\mu_1$ и демпфера ε_B ,

где $\partial \varepsilon_B / \partial t = \sigma' / \eta_1$. Для этого продифференцируем по времени выражение для ε_A и сложим результат дифференцирования с выражением для $\partial \varepsilon_B / \partial t$. Учтем при этом, что сумма $\varepsilon_A + \varepsilon_B = \varepsilon$ равна деформации всей максвелловской схемы, которая также равна деформации пружинки $\varepsilon = \sigma_\infty / \mu_0$. Тогда можно записать следующее уравнение:

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \frac{\sigma'}{\tau} = \frac{\eta_1}{\tau} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (3)$$

где $\tau = \eta_1 / \mu_1$ – характерное время релаксации напряжения. Заметим, что умножив обе части (3) на τ и совершив предельный переход при $\tau \rightarrow 0$, получим: $\sigma'_{\tau \rightarrow 0} = \eta_1 \partial \varepsilon / \partial t$, т.е. рассматриваемая модель переходит в модель Кельвина-Фойгта, которая была нами использована в работе [17].

Для удобства использования в численной схеме запишем соотношение (3) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma' e^{\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{\eta_1}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (4)$$

Для упругой части напряжения из (2) следует:

$$\frac{\partial \sigma_\infty}{\partial t} = \mu_{00} (1 + 3\beta \varepsilon^2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (5)$$

В (4) и (5) введена колебательная скорость $v = \partial u / \partial t$ и учтено, что $\varepsilon = \partial u / \partial y$.

Уравнение движения частиц среды имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial y}. \quad (6)$$

Уравнения (4)–(6) должны быть дополнены граничными условиями. Первое условие – заданное значение ускорения нижней пластины резонатора, второе условие определяется из закона движения верхней пластины:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{y=0} = W_0 \cos \omega t; \quad (7)$$

$$\left(M \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma S \right) \Big|_{y=L} = 0. \quad (8)$$

Получившаяся система соотношений (1), (4)–(8) моделировалась методом конечных разностей на смещенных сетках [23]. Работоспособность написанной численной схемы проверялась путем сравнения результатов расчетов с аналитическим решением для линейного резонатора ($\beta = 0$), полученным в [17]. При этом связь напряжения и деформации, использованная в [17] была модифицирована с учетом модели среды с одним временем релаксации.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения проводились с двумя резонаторами в виде прямоугольных параллелепипедов, изготовленных из полимерного материала пластисола. На верхней грани параллелепипедов закреплялась

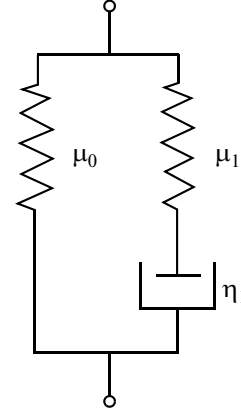


Рис. 1. Механическая модель резиноподобной среды с одним временем релаксации.

жесткая пластина массы M . Толщина резонаторов была одинаковой и составляла 15 мм. Длина и ширина составляли 67 и 40 мм (резонатор I), 70 и 40 мм (резонатор II). Масса верхней пластины была примерно одинакова: 12 г (резонатор I), 11.55 г (резонатор II).

В резонаторах были проведены измерения сдвигового модуля пластисола μ_0 при его статической деформации [18]. Для этого нижняя граница резонатора закреплялась, а к верхней пластине прилагалась известная сила, которая создавала в слое сдвиговые напряжения. По аппроксимации измеренной зависимости сдвиговой деформации от приложенного напряжения кубической параболой были определены линейный модуль сдвига $\mu_{00} = 9.9 \pm 0.6$ кПа и нелинейный параметр $\beta = 1.34 \pm 0.23$ (резонатор I) и $\mu_{00} = 6.7 \pm 0.4$ кПа, $\beta = 0.76 \pm 0.13$ (резонатор II).

Время релаксации и сдвиговая вязкость материала резонаторов определялись из зависимости ускорения верхней пластины от частоты, измеренной в линейном режиме в диапазоне 20–400 Гц. Колебания нижней пластины резонатора возбуждались вибратором Brüel&Kjær 4810. Электрический сигнал на вибратор поступал с генератора сигналов Tektronix 3021В через усилитель мощности MF LV 103. Ускорения нижней и верхней пластин резонатора измерялись миниатюрными одноосными акселерометрами Brüel&Kjær 4374. Масса акселерометров была 1 г, т.е. их влиянием на процесс колебаний резонатора можно было пренебречь. Сигналы акселерометров регистрировались цифровым осциллографом Tektronix 3032В и передавались через GPIB интерфейс в компьютер. Управление экспериментальной установкой и сбор данных осуществлялись с помощью программы, написанной в среде Lab-View. В процессе измерения резонансных кривых ускорение нижней границы резонатора при каждом значении частоты было одинаковым и составляло 1 м/с^2 , что соответствовало линейному режиму измерений. Измерения проводились с шагом по ча-

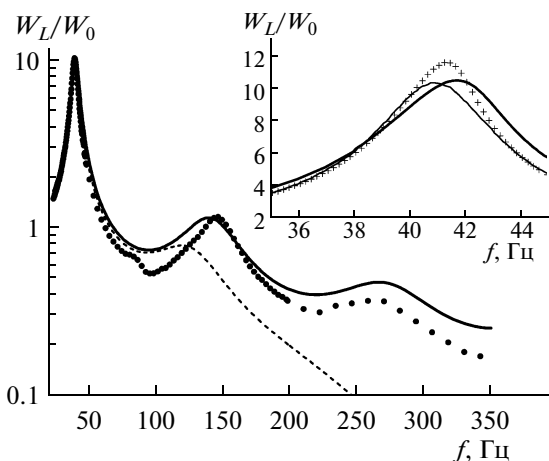


Рис. 2. Резонансные кривые, полученные для резонатора I. На основном графике представлены резонансные кривые в режиме линейных колебаний ($W_0 = 1 \text{ м/с}^2$). Точками показаны измеренные значения, сплошной линией — результаты расчета с использованием модели среды с одним временем релаксации. Пунктирной линией показана зависимость, рассчитанная для среды без релаксации. На вставке показаны резонансные кривые в области первого резонанса при амплитуде ускорения нижней границы резонатора $W_0 = 15 \text{ м/с}^2$. Символы соответствуют измеренным значениям, результаты расчета показаны сплошной жирной линией. Тонкой линией показан расчет для линейных колебаний ($W_0 = 1 \text{ м/с}^2$).

стоте 0.1 Гц, что обеспечивало достаточную точность определения вязкоупругих параметров пластисола. Для обеспечения постоянства амплитуды ускорения нижней пластины в указанном частотном диапазоне был использован следующий алгоритм. При заданной частоте на выходе генератора устанавливалось напряжение, при котором амплитуда ускорения нижней пластины была немного меньше необходимого значения. Это напряжение увеличивалось до тех пор, пока амплитуда ускорения не достигала необходимого значения с погрешностью, не превышающей 2%. В течение 2–3 с в резонаторе устанавливались стационарные колебания, после чего производилось измерение и запись ускорения верхней пластины резонатора. Затем задавалось следующее значение частоты и измерения повторялись в соответствии с описанным алгоритмом.

Описанный алгоритм измерений имеет принципиальное значение при изучении резонансных характеристик в нелинейном режиме, когда требуется обеспечить постоянство внешнего воздействия на резонатор. Однако в нелинейном режиме профиль ускорения нижней пластины искажается за счет генерации в резонаторе высших гармоник. Поэтому в нелинейном режиме поддерживалась постоянная амплитуда ускорения на основной частоте, что потребовало модификации описанного выше алгоритма измерения резонансных характеристик. Для

каждого заданного значения частоты записывалась реализация, содержащая около 50 периодов колебаний ускорения нижней пластины, и производилось вычисление амплитуды основной гармоники методом БПФ. Затем регулировкой выходного напряжения задающего генератора подбирались такое ускорение нижней пластины, при котором достигался заданный уровень амплитуды на основной частоте с погрешностью, не превышающей 3%.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ СРАВНЕНИЕ С ЧИСЛЕННЫМИ РАСЧЕТАМИ

Экспериментальная зависимость отношения ускорений верхней и нижней пластин резонатора, соответствующая линейному режиму колебаний в резонаторе I, представлена на рис. 2 точками. Численные расчеты для линейного режима проводились с использованием модели среды с одним временем релаксации и при нелинейном коэффициенте, равном нулю. Значения времени релаксации и коэффициента сдвиговой вязкости при расчетах варьировались таким образом, чтобы добиться наилучшего (в смысле минимального среднеквадратичного отклонения) совпадения экспериментальной и расчетной зависимостей (показана сплошной линией на рис. 2) в диапазоне 20–200 Гц. Таким образом, были определены значения $\tau = 0.7 \text{ мс}$, $\eta_1 = 4.7 \text{ Па} \cdot \text{с}$. Заметим, что в диапазоне частот 10–300 Гц, где лежат три первые резонансные частоты исследуемого резонатора, пластисол имеет ярко выраженные дисперсионные свойства. Это хорошо видно из сравнения экспериментальных результатов с видом резонансной кривой (штриховая линия), рассчитанной по модели Кельвина-Фойгта, где параметры пластисола $\mu = 9.88 \text{ кПа}$, $\eta = 4.7 \text{ Па} \cdot \text{с}$ не зависят от частоты. Эта кривая совпадает с экспериментальной в области первого резонанса, однако на высоких частотах экспериментальная зависимость существенно отличается: частоты измеренных второго и третьего резонансов лежат выше, что свидетельствует о росте упругости пластисола с увеличением частоты, в то время как амплитуда измеренных резонансов выше, что связано с уменьшением вязкости с ростом частоты. Для резонатора II аналогичным образом были получены значения времени релаксации $\tau = 1.2 \text{ мс}$ и коэффициента сдвиговой вязкости $\eta_1 = 2.8 \text{ Па} \cdot \text{с}$. Параметры резонаторов, которые были использованы при расчетах, представлены в таблице.

На рис. 3 приведены результаты расчета резонансных кривых для резонатора I вблизи частоты первого резонанса при различных значениях амплитуды ускорения нижней пластины W_0 . При каждом значении W_0 сначала рассчитывалась резонансная кривая при медленном возрастании частоты, затем — при ее медленном убывании. В начальный момент времени задавалось значение амплитуды W_0

и минимальная частота. Затем частота увеличивалась со скоростью 0.1 Гц/с, при этом каждую секунду производилась запись ускорения верхней пластины W_L и вычисление амплитуды первой гармоники. Расчет резонансной кривой при уменьшении частоты проводился аналогичным образом. Отличие состояло лишь в том, что в начальный момент времени задавалось значение максимальной частоты. В режиме линейных колебаний ($W_0 \leq 5$ м/с²) амплитуда ускорения верхней границы резонатора увеличивается в 10.5 раз по сравнению с амплитудой на нижней границе, задаваемой вибратором. При ускорении нижней пластины 30 м/с² амплитуда скорости верхней границы резонатора достигает $V_L = 1.2$ м/с, что составляет 39% от скорости сдвиговой волны. При таких скоростях частиц в резонаторе проявляются нелинейные эффекты: резонансная кривая становится асимметричной, а резонансная частота увеличивается. Коэффициент усиления по ускорению также растет по сравнению с линейным случаем и достигает 11.6 при $W_0 = 50$ м/с². При амплитудах $W_0 > 40$ м/с² резонансные кривые, полученные при увеличении частоты и при ее уменьшении (показано стрелками), не совпадают, т.е. возникает область бистабильности. С ростом амплитуды колебаний в резонаторе область бистабильности расширяется. Эффект асимметричности резонансной кривой и смещение резонансной частоты наблюдался экспериментально. На вставке на рис. 2 результаты измерения резонансной кривой при $W_0 = 15$ м/с² показаны крестиками. Там же приведены результаты расчета резонансной кривой для линейного случая и для $W_0 = 15$ м/с². Наблюдается увеличение первой резонансной частоты на 0.4 Гц, что меньше расчетного значения почти в 2 раза (0.7 Гц). Усиление амплитуды колебаний верхней границы резонатора в резонансе в эксперименте со-

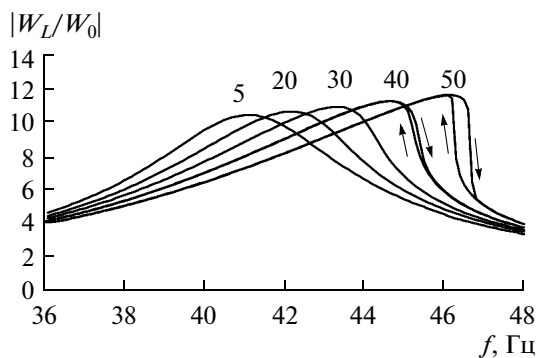


Рис. 3. Резонансные кривые вблизи первой резонансной частоты, рассчитанные при разных значениях амплитуды ускорения нижней пластины W_0 в резонаторе I. Числа у кривых соответствуют амплитуде W_0 в м/с². Стрелками показано направление изменения частоты при расчете.

Измеренные параметры резонаторов, используемые в расчетах

Резонатор	μ_{00} , кПа	β	τ , мс	η_1 , Па·с
I	9.9 ± 0.6	1.34 ± 0.23	0.7 ± 0.2	4.7 ± 0.3
II	6.7 ± 0.4	0.76 ± 0.13	1.2 ± 0.3	2.8 ± 0.2

ставляло 11.7, что превысило расчетное значение 10.6 почти на 10%.

Нелинейные эффекты оказались более выраженными в резонаторе II, изготовленном из полимера с меньшим коэффициентом сдвиговой вязкости. В режиме линейных колебаний амплитуда ускорения верхней границы резонатора II увеличивается в 13.7 раз по сравнению с амплитудой на вибраторе (см. рис. 4). Сравнительно малая вязкость приводит к тому, что нелинейные эффекты в резонаторе II проявляются уже при амплитудах ускорения нижней пластины, превышающих 5 м/с². Область бистабильности в расчетных кривых возникает при $W_0 = 20$ м/с². Измеренные резонансные кривые при различных ускорениях нижней пластины резонатора (II) представлены на рис. 4 различными символами. Видно, что резонансные кривые становятся асимметричными, а резонансная частота растет с увеличением амплитуды колебаний в резонаторе. Результаты более детальных измерений увеличения резонансной частоты с ростом амплитуды ускорения нижней границы W_0 показаны на рис. 5. Здесь же сплошной линией приведены результаты для значения нелинейного параметра $\beta =$

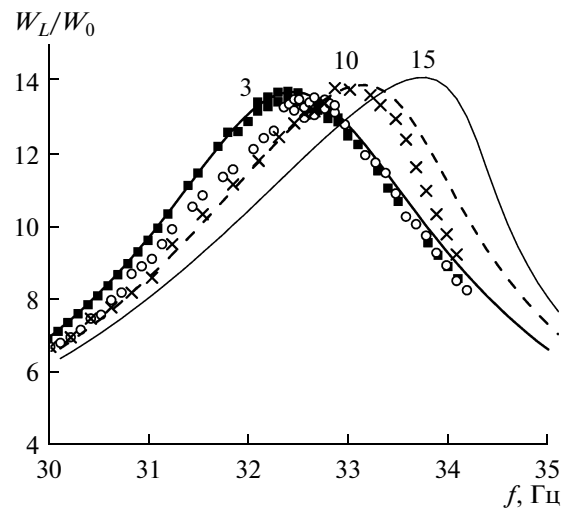


Рис. 4. Резонансные кривые вблизи первой резонансной частоты, полученные для резонатора II при разных значениях амплитуды ускорения нижней пластины W_0 . Результаты измерений показаны символами (\blacksquare — $W_0 = 3$ м/с², \circ — $W_0 = 10$ м/с², \times — $W_0 = 15$ м/с²), расчетные зависимости — линиями. Числа у кривых соответствуют амплитуде W_0 в м/с².

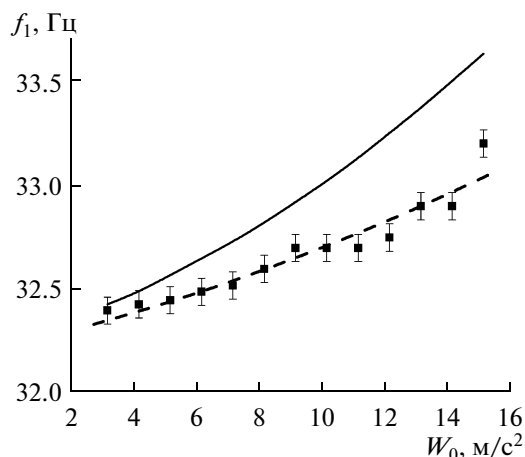


Рис. 5. Зависимость первой резонансной частоты от амплитуды ускорения нижней пластины резонатора II. Символы соответствуют измеренным значениям, сплошной и пунктирной линиями показаны результаты расчета для $\beta = 0.76$ и $\beta = 0.35$ соответственно.

$= 0.76$, полученного из статических измерений. По данным расчета, резонансная частота должна расти почти в два раза быстрее, чем было измерено в эксперименте. Штриховой линией показаны результаты расчета для значения $\beta = 0.35$, при котором отклонение от экспериментальных значений было минимальным.

Время установления стационарного режима колебаний в области бистабильности может значительно превосходить характерные времена в режиме линейных колебаний. Были рассчитаны профили ускорения вблизи резонансной частоты в течение 30 с после включения постоянного по амплитуде ускорения на нижней пластине резонатора II. Расчет проводился при различных амплитудах ускорения нижней пластины. При амплитудах ускорения менее 15 м/с^2 время установления колебаний не зависит от амплитуды и составляет около десяти периодов на частотах вблизи резонанса (32–34 Гц). При амплитудах 20 м/с^2 и 25 м/с^2 время установления стационарного режима увеличивается, при этом его значение зависит от частоты. На резонансной частоте при амплитуде ускорения нижней пластины $W_0 = 25 \text{ м/с}^2$ стационарный режим устанавливается за 15 периодов. В области бистабильности на установления стационарного режима при указанной амплитуде W_0 затрачивается больше времени. Долше всего (120 периодов) стационарный режим устанавливается на частоте 35.5 Гц, соответствующей середине области бистабильности. На частоте 35.7 Гц время установления стационарного режима уже в три раза меньше и составляет около 1 с (40 периодов).

Распространение гармонической волны конечной амплитуды в среде с кубической нелинейностью приводит к генерации гармоник и искажению ис-

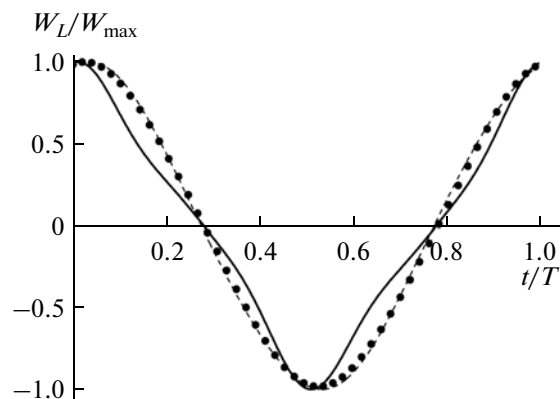


Рис. 6. Временной профиль ускорения верхней пластины резонатора I на резонансной частоте при $W_0 = 15 \text{ м/с}^2$. Измеренный и рассчитанный профили показаны точками и штриховой линией соответственно. Сплошной линией показан рассчитанный профиль для резонатора с коэффициентом сдвиговой вязкости $\eta = 1.6 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

ходного синусоидального профиля. На рис. 6 показаны измеренный и рассчитанный профили ускорения верхней пластины резонатора I на резонансной частоте при амплитуде $W_0 = 15 \text{ м/с}^2$. Профили практически совпадают и мало отличаются от профиля гармонической волны, что связано с относительно большим затуханием как волны основной частоты, так и волны третьей гармоники. Из линейных измерений (рис. 2) можно определить, что отношение W_L/W_0 на частоте 3-й гармоники (123 Гц) меньше единицы и составляет 0.7 (измерение) и 0.94 (расчет). Таким образом, резонансного усиления третьей гармоники в таком резонаторе не происходит. Если уменьшить вязкость, то нелинейные эффекты становятся более выраженными. На рис. 6 показан профиль, рассчитанный для случая малой вязкости ($\eta = 1.6 \text{ Па} \cdot \text{с}$). Искажения этого профиля, связанные с генерацией третьей гармоники, хорошо видны.

На рис. 7 показаны результаты гармонического анализа временных профилей, представленных на рис. 6. Когда вязкость среды достаточно большая ($\eta = 4.7 \text{ Па} \cdot \text{с}$), уровень третьей гармоники в резонаторе мал и составляет -32 дБ по отношению к основной гармонике, что соответствует результатам измерений. При уменьшении коэффициента вязкости до $1.6 \text{ Па} \cdot \text{с}$ уровень третьей гармоники возрастает на 16 дБ и составляет -15 дБ по отношению к основной гармонике. Такой рост эффективности генерации третьей гармоники объясняется как возрастанием на 10 дБ амплитуды основной гармоники, так и резонансным усилением третьей гармоники в резонаторе (отношение W_L/W_0 на частоте 3-й гармоники равно 1.9). Отметим, что в измеренном спектре ускорения нижней пластины присутствуют вторая и третья гармоники, но их уро-

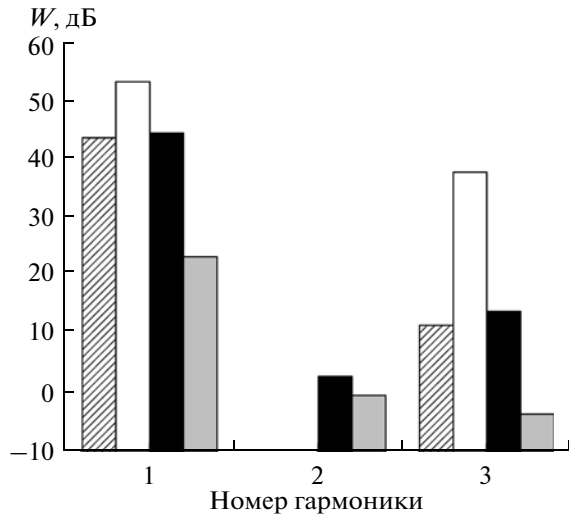


Рис. 7. Первые три гармоники ускорения верхней пластины резонатора I при амплитуде ускорения нижней пластины 15 м/с^2 на резонансной частоте. Черным и серым цветом показаны гармоники измеренных ускорений верхней (W_L) и нижней (W_D) пластин резонатора, Заштрихованный столбец и столбец белого цвета соответствуют гармоникам ускорения W_L , рассчитанным для резонаторов с коэффициентами сдвиговой вязкости $\eta = 4.7 \text{ Па} \cdot \text{с}$ и $\eta = 1.6 \text{ Па} \cdot \text{с}$ соответственно.

вень мал (-23 и -26 дБ соответственно) по сравнению с уровнем основной гармоники.

ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Проявление нелинейных эффектов и процесс генерации гармоник в резонаторе, заполненном средой с кубической нелинейностью, имеет ряд особенностей. В резонаторе, настроенном на резонансную частоту основной гармоники, волны высших гармоник, возникающие на кубической нелинейности, не являются резонансными. Это обусловлено дисперсией скорости сдвиговых волн в области низких частот, вызванной конечными временами релаксации вязкоупругих параметров среды. Наличие жесткой пластины конечной массы на верхней границе резонатора также приводит к смещению резонансных частот и десинхронизации волн основной частоты и ее гармоник [17]. Поэтому генерация третьей и более высоких гармоник происходит не в резонансном режиме. В частности, амплитуду колебательной скорости третьей гармоники можно оценить исходя из соотношения, полученного в [7] для случая бегущей волны:

$$V_3(y) = \frac{\beta_Z \omega V_0^3}{24c_t^3 \alpha} (e^{-3\alpha y} - e^{-9\alpha y}), \quad (9)$$

где V_0 — амплитуда колебательной скорости волны основной частоты ω , $\beta_Z = 1.5\beta$ — нелинейный параметр среды, $c_t = (\mu/\rho)^{1/2}$ — скорость сдвиговой

волны, $\alpha = \frac{\eta \omega^2}{2\rho_0 c_t^3}$ — коэффициент затухания волны основной частоты. Амплитуда третьей гармоники ускорения на верхней границе резонатора, возникающая на одном проходе толщины резонатора L , может быть записана в виде:

$$W_3(y=L) = \frac{\beta W_L^3}{16\omega c_t^3 \alpha} [\exp(-3\alpha L) - \exp(-9\alpha L)]. \quad (10)$$

Таким образом, амплитуда третьей гармоники ускорения зависит кубично от амплитуды ускорения волны основной частоты. Амплитуда основной гармоники в резонаторе с малой вязкостью ($\eta = 1.6 \text{ Па} \cdot \text{с}$) в 3 раза выше, чем в резонаторе с вязкостью $\eta = 4.7 \text{ Па} \cdot \text{с}$ (см. рис. 7), что должно, в соответствии с [7], приводить к возрастанию амплитуды третьей гармоники на 29 дБ, что очень близко к результату (26 дБ), полученному путем моделирования. На амплитуду третьей гармоники в резонаторах с различной сдвиговой вязкостью влияет возможность усиления за счет резонанса. В резонаторе с малой вязкостью третья гармоника может дополнительно усиливаться за счет резонанса в 1.9 раз, в то время как для резонатора с большой вязкостью такое усиление отсутствует (см. рис. 2). Т.е. снижение вязкости среды является определяющим фактором в повышении эффективности нелинейных процессов в рассматриваемых резонаторах.

Результаты нашей работы показывают, что наблюдается эффект увеличения резонансной частоты с ростом амплитуды колебаний в резонаторе с кубично нелинейной средой. В соответствии с расчетами происходит несимметричное искажение формы резонансной кривой. Однако отсутствует количественное соответствие наблюдаемых в эксперименте эффектов с результатами расчетов, выполненных с параметрами, определенными из статических измерений. Так, рост первой резонансной частоты при заданном значении коэффициента сдвиговой вязкости соответствует расчетным значениям для коэффициента нелинейности $\beta = 0.35$, что более чем в 2 раза меньше значения, определенного из статических измерений. Наши измерения показали, что линейные статический и динамический модуль упругости резиноподобного полимера отличаются. С ростом частоты линейный сдвиговой модуль возрастает, что приводит к неэквидистантности резонансных частот. Можно предположить, что значения статического и динамического коэффициентов нелинейности также отличаются. Это обстоятельство можно было бы учесть путем усложнения реологической модели (рис. 1), например, предполагая пружинку в максвелловской схеме нелинейной, причем размягчающейся с ростом деформации: $\mu_1 = \mu_{10}(1 - \beta_1 \varepsilon^2)$. Следует отметить, что сейчас в литературе идет довольно оживленная дискуссия относительно определения упругих параметров несжимаемых материалов, куда относятся

многие полимеры и мягкие биологические ткани. Предлагаются как теоретические модели описания таких сред с использованием ограниченного числа нелинейных параметров [7, 11, 12], так и методы измерения этих параметров [13]. Предложенный в нашей работе метод интерферометра при его использовании в нелинейном режиме может быть полезен для получения информации о нелинейных параметрах резиноподобных материалов в низкочастотной области.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ и МНТЦ (№ 3691).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Oberai A.A., Gokhale N.H., Goenezen S., Barbone P.E., Hall T.J., Sommer A.M., Jiang J. Linear and nonlinear elasticity imaging of soft tissue in vivo: demonstration of feasibility // *Phys. Med. Biol.* 2009. V. 54. P. 1191–1207.
2. Андреев В.Г., Ведерников А.В. Измерение распределения сдвигового модуля упругости в неоднородных резиноподобных средах // *Вестник Моск. унта, сер. 3, физ.-астр.* 2006. Т. 46. № 3. С. 52–56.
3. Tanter M., Bercoff J., Athanasiou A., Deffieux T., Gennisson J.-L., Montaldo G., Muller M., Tardivon A., Fink M. Quantitative assessment of breast lesion viscoelasticity: Initial clinical results using supersonic shear imaging // *Ultrasound in Medicine and Biology.* 2008. V. 34. № 9. P. 1373–1386.
4. Garra B.S., Céspedes I., Ophir J., Pratt S., Zaubier R., Magnat C.M., Pennanen M.F. Elastography of breast lesions: initial clinical results // *Radiology.* 2002. V. 202. P. 79–86.
5. Erkamp R.Q., Emelianov S.Y., Skovoroda A.R., O'Donnell M. Nonlinear elasticity imaging: theory and phantom study // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2004. V. 51. № 5. P. 532–539.
6. Руденко О.В., Сапожников О.А. Волновые пучки в кубично нелинейных средах без дисперсии // *ЖЭТФ.* 1994. Т. 106. № 2(8). С. 395–413.
7. Zabolotskaya E.A., Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Meegan G.D. Modeling of nonlinear shear waves in soft solids // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. V. 116. № 5. P. 2807–2813.
8. Wochner M.S., Hamilton M.F., Ilinskii Yu.A., Zabolotskaya E.A. Cubic nonlinearity in shear wave beams with different polarizations // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 123. № 5. P. 2488–2495.
9. Гусев В.А., Маков Ю.Н. Спектральное представление решения кубично-нелинейного уравнения простой волны Римана // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 5. С. 591–596.
10. Catheline S., Gennisson J.-L., Tanter M., Fink M. Observation of shock transverse waves in elastic media // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 91. № 16. P. 43011–43014.
11. Destrade M., Gilchrist M.D., Saccomandi G. Third- and fourth-order constants of incompressible soft solids and the acousto-elastic effect // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 127. № 5. P. 2759–2763.
12. Destrade M., Gilchrist M.D., Ogden R.W. Third- and fourth-order elasticities of biological soft tissues (L) // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 127. № 4. P. 2103–2106.
13. Rénier M., Gennisson J.-L., Barrière C. et al. Fourth-order shear elastic constant assessment in quasi-incompressible soft solids // *Appl. Phys. Lett.* 2008. V. 93. № 10. P. 1–3.
14. Gennisson J.-L., Rénier M., Catheline S., Barrière C., Bercoff J., Tanter M., Fink M. Acoustoelasticity in soft solids: Assessment of the nonlinear shear modulus with the acoustic radiation force // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 122. № 6. P. 3211–3219.
15. Руденко О.В., Хедберг К.М., Энфло Б.О. Стоячие акустические волны конечной амплитуды в кубично нелинейной среде // *Акуст. журн.* 2007. Т. 53. № 4. С. 522–532.
16. Rudenko O.V. Nonlinear standing waves, resonance phenomena, and frequency characteristics of distributed systems // *Acoust. Phys.* 2009. V. 55. № 1. P. 27–54.
17. Андреев В.Г., Крит Т.Б., Сапожников О.А. Стоячие волны в упругом слое, нагруженном конечной массой // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 2. С. 190–196.
18. Андреев В.Г., Булакова Т.А. Измерения сдвиговой упругости и вязкости резиноподобных материалов // *Акуст. журн.* 2007. Т. 53. № 1. С. 50–54.
19. Андреев В.Г., Крит Т.Б., Сапожников О.А. Стоячие сдвиговые волны в слоистых резиноподобных средах // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 5. С. 579–586.
20. Андреев В.Г., Крит Т.Б., Костиков В.В. и др. Стоячие сдвиговые волны в резонаторе с неоднородной резиноподобной средой // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 1. С. 3–12.
21. Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П. Основы молекулярной акустики. М.: Наука, 1964. 516 с.
22. Oudry J., Bastard C., Miette V., Willinger R., Sandrin L. Copolymer-in-oil phantom materials for elastography // *Ultrasound Med. Biol.* 2009. V. 35. № 7. P. 1185–1197.
23. Sapozhnikov O.A., Maxwell A.D., MacConaghy B., Bailey M.R. A mechanistic analysis of stone fracture in lithotripsy // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 112. № 2. P. 1190–1202.