

## КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.16

### СТОЯЧИЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В СЛОИСТЫХ РЕЗИНОПОДОБНЫХ СРЕДАХ

© 2010 г. В. Г. Андреев, Т. Б. Крит, О. А. Сапожников

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики  
119991 Москва, Ленинские горы 1, стр. 2

E-mail: timofey@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 4.03.10 г.

Рассмотрены стоячие сдвиговые волны в слоистых средах, где сдвиговой модуль изменяется скачком при переходе через плоские границы раздела. Получено общее решение для амплитуд сдвиговых волн в резонаторе с  $N$ -слойной структурой, нижняя граница которой колеблется по гармоническому закону, а на верхней границе закреплена пластина конечной массы. Приведены результаты расчетов и измерений для резонатора со структурой, в которой недеформируемые металлические слои чередуются с упругими слоями резиноподобного полимера. Показано, что резонансными частотами такого резонатора можно управлять, изменяя число слоев и их толщину. Экспериментально и теоретически показано, что по виду резонансной кривой резонатора с двухслойной структурой можно определить сдвиговой модуль одного из слоев, при условии, что упругость другого слоя известна. Метод разбиения на конечное число слоев был использован для анализа резонансных характеристик одномерного резонатора, заполненного резиноподобной средой, свойства которой непрерывно меняются в направлении, перпендикулярном сдвиговым смещениям. Проведен анализ выбора числа слоев в зависимости от вида неоднородности.

*Ключевые слова:* резиноподобные материалы, слоистые среды, сдвиговые волны в резонаторе.

#### ВВЕДЕНИЕ

Интерес к изучению сдвиговых волн в неоднородных резиноподобных средах обусловлен, прежде всего, развитием методов медицинской диагностики мягких биологических тканей. Патологические изменения в мягких тканях приводят к существенному изменению сдвиговой упругости, поэтому визуализация распределения сдвигового модуля позволяет обнаружить заболевание на ранних этапах развития [1]. Обнаружение неоднородностей сдвиговой упругости в мягких тканях производится либо по измерению деформаций внутри тканей под действием квазистатической нагрузки [2–4], либо по измерению локальной скорости сдвиговых волн, возбуждаемых с помощью сфокусированного ультразвука [5, 6].

Создание адекватных моделей биологических тканей с упругими неоднородностями для отработки методов их диагностики и картирования становится актуальной задачей. Слоистые среды с плоскими границами раздела, в которых модуль сдвига изменяется скачком при переходе из слоя в слой, являются простыми моделями мягких биологических тканей, где волновые процессы описываются одномерными уравнениями. В работе [3] слой желатина был использован для оптимизации профиля штампа, применяемого в устройстве для измерения механического импе-

данса мышечной ткани. В [7] показано, что адекватной моделью мышцы предплечья является трехслойная структура. Принципиальная возможность локализации неоднородности сдвигового модуля с точностью до долей миллиметра при использовании сдвиговых волн, возбуждаемых сфокусированным ультразвуком, продемонстрирована на примере трехслойной среды [8].

Результаты, полученные для дискретной слоистой среды, могут быть обобщены на случай, когда неоднородность распределена непрерывным образом вдоль выделенного направления. Желатиновые гидрогели меняют упругость даже при небольшом изменении pH, что используется для создания фантомов мягких биологических тканей с плавной неоднородностью сдвигового модуля [9]. Такая среда может быть представлена набором слоев, где модуль меняется дискретно с достаточно малым шагом, чтобы обеспечить необходимую точность расчетов волновых процессов. Выбор необходимого числа слоев в зависимости от вида неоднородности и скорости пространственного изменения модуля сдвига представляет отдельную задачу, анализ которой также содержится в данной статье.

В работе [10] изучены сдвиговые волны в однородном резиноподобном слое, на верхней границе которого закреплялась пластина конечной массы, а нижняя граница колебалась по гармонич-

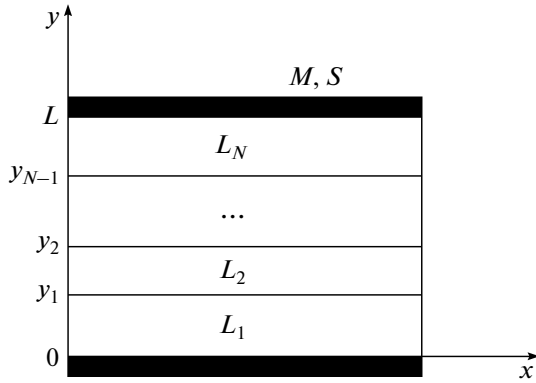


Рис. 1. Модель многослойного образца, нагруженно-го пластиной конечной массы.

ческому закону с заданным ускорением. В такой системе возникают резонансы на частотах, которые определяются как массой пластины, так и вязкоупругими параметрами слоя. По измеренным резонансным кривым были найдены сдвиговый модуль и коэффициент сдвиговой вязкости резиноподобного слоя. Для этого результаты измерений сравнивались с расчетами, выполненными по аналитическим формулам для одномерного резонатора с заданными граничными условиями. Значения сдвигового модуля и коэффициента сдвиговой вязкости определялись по минимальному среднеквадратичному отклонению результатов расчетов от измеренной резонансной кривой. В настоящей работе развитый в [10] подход обобщается на случай, когда резонатор образован многослойной структурой, на верхней границе которой находится пластина известной массы.

**СТОЯЧИЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ  
В РЕЗОНАТОРЕ С N-СЛОЙНОЙ  
СТРУКТУРОЙ**

Рассмотрим структуру толщиной  $L$ , имеющую форму прямоугольного параллелепипеда с верхней гранью площадью  $S$  и состоящую из  $N$  слоев конечной толщины (рис. 1). Слой номера  $n$  имеет толщину  $L_n$ , плотность  $\rho_n$ , модуль сдвига  $\mu_n$  и коэффициент сдвиговой вязкости  $\eta_n$ . Считается, что толщина образца  $L$  значительно меньше его поперечных размеров. Указанное допущение позволяет считать движение частиц зависящим лишь от продольной координаты, т.е. пользоваться одномерным приближением. Образец закрепляется на горизонтальной пластине, которая совершает гармонические колебания в направлении оси  $x$ . На верхней грани образца ( $y = L$ ) находится пластина массы  $M$ , площадь которой равна площади верхней грани образца.

Упругие процессы в каждом слое описываются уравнением движения и законом Гука:

$$\rho_n \frac{\partial^2 u_x^{(n)}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xy}^{(n)}}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\sigma_{xy}^{(n)} = \mu_n \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial y} + \eta_n \frac{\partial^2 u_x^{(n)}}{\partial y \partial t}. \tag{2}$$

Здесь  $u_x^{(n)}$  – смещение частицы вдоль оси  $x$ ,  $\sigma_{xy}^{(n)} = F_x^{(n)}/S$  – компонента тензора напряжений,  $F_x^{(n)}$  – компонента силы вдоль оси  $x$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  – номер слоя.

На границах соседних слоев с координатами  $y_n = \sum_{j=1}^n L_j$  ( $n = 1, 2, \dots, N - 1$ ) должны быть выполнены условия неразрывности среды и равенства механических напряжений:

$$u_x^{(n)}(y_n, t) = u_x^{(n+1)}(y_n, t), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mu_n \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial y}(y_n, t) + \eta_n \frac{\partial^2 u_x^{(n)}}{\partial y \partial t}(y_n, t) = \\ = \mu_{n+1} \frac{\partial u_x^{(n+1)}}{\partial y}(y_n, t) + \eta_{n+1} \frac{\partial^2 u_x^{(n+1)}}{\partial y \partial t}(y_n, t). \end{aligned} \tag{4}$$

Кроме того, на верхней и нижней границах образца должны выполняться два дополнительных условия. Первое условие – заданное значение ускорения нижней пластины, второе условие определяется из закона движения верхней пластины:

$$\left. \frac{\partial^2 u_x^{(1)}}{\partial t^2} \right|_{y=0} = w_x|_{y=0}, \tag{5}$$

$$M \left. \frac{\partial^2 u_x^{(N)}}{\partial t^2} \right|_{y=L} = -\sigma_{xy}^{(N)}|_{y=L} S. \tag{6}$$

Для случая гармонических колебаний  $u_x^{(n)}(y, t) = U_n(y) \exp(e^{-i\omega t})$ ,  $\sigma_{xy}^{(n)}(y, t) = \Sigma_n(y) \exp(e^{-i\omega t})$  уравнения (1)–(2) принимают вид:

$$-\omega^2 \rho_n U_n = \frac{d \Sigma_n}{dy}, \tag{7}$$

$$\Sigma_n = \tilde{\mu}_n \frac{d U_n}{dy}, \tag{8}$$

где  $U_n(y)$  и  $\Sigma_n(y)$  – комплексные амплитуды соответствующих величин  $u_x^{(n)}(y, t)$  и  $\sigma_{xy}^{(n)}(y, t)$ ,  $\tilde{\mu}_n = \mu_n - i\omega \eta_n$  – комплексный модуль сдвига. Для комплексной амплитуды поперечного смещения частиц слоя из (7) и (8) следует уравнение:

$$\frac{d^2 U_n}{dy^2} + \omega^2 \frac{\rho_n}{\tilde{\mu}_n} U_n = 0. \tag{9}$$

Общее решение уравнения (9) имеет вид двух встречных волн:

$$U_n = A_n \exp(e^{ik_n y}) + B_n \exp(e^{-ik_n y}), \quad (10)$$

где волновое число определяется из закона дисперсии  $k_n = \omega \sqrt{\frac{\rho_n}{\tilde{\mu}_n}}$ .

Условия сшивания (3)–(4) и граничные условия (5)–(6) в терминах комплексных амплитуд при гармонических колебаниях принимают следующий вид:

$$U_n(y_n) = U_{n+1}(y_n), \quad (11)$$

$$\tilde{\mu}_n \frac{dU_n}{dy}(y_n) = \tilde{\mu}_{n+1} \frac{dU_{n+1}}{dy}(y_n), \quad (12)$$

$$U_1|_{y=0} = -\frac{W_0}{\omega^2}, \quad (13)$$

$$\left( U_N - \frac{\tilde{\mu}_N S}{M\omega^2} \frac{dU_N}{dy} \right) \Big|_{y=L} = 0. \quad (14)$$

После подстановки решения в виде (10) в уравнения (11)–(14) приходим к системе из  $2N$  линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & A_1 + B_1 = -\frac{W_0}{\omega^2}; \\ & A_n \exp(ik_n y_n) + B_n \exp(-ik_n y_n) - \\ & - A_{n+1} \exp(ik_{n+1} y_n) - B_{n+1} \exp(-ik_{n+1} y_n) = 0; \\ & A_n i k_n \tilde{\mu}_n \exp(ik_n y_n) - B_n i k_n \tilde{\mu}_n \exp(-ik_n y_n) - \\ & - A_{n+1} i k_{n+1} \tilde{\mu}_{n+1} \exp(ik_{n+1} y_n) + \\ & + B_{n+1} i k_{n+1} \tilde{\mu}_{n+1} \exp(-ik_{n+1} y_n) = 0; \\ & n = 1, 2, \dots, N - 1; \\ & A_N \left( 1 - i k_N \frac{\tilde{\mu}_N S}{M\omega^2} \right) \exp(ik_N L) + \\ & + B_N \left( 1 + i k_N \frac{\tilde{\mu}_N S}{M\omega^2} \right) \exp(-ik_N L) = 0. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Система уравнений (15) была решена по формулам Крамера [11] с использованием MatLab. Были вычислены  $2N$  амплитуд встречных волн и рассчитано отношение ускорений верхней и нижней пластин ( $W_L/W_0$ ). Затем это отношение было измерено экспериментально.

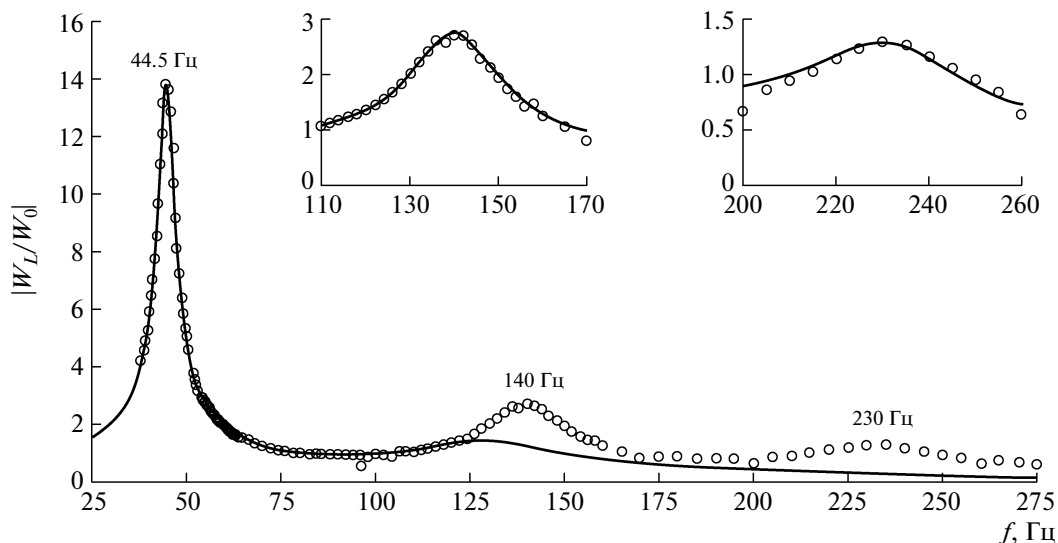
Расчеты показали, что колебания исследуемой многослойной структуры имеют выраженный резонансный характер. Резонансные частоты, при которых отношение  $W_L/W_0$  достигает максимальных значений, определяются как размерами образца, так и вязкоупругими параметрами слоев.

## РЕЗОНАТОР С 11-СЛОЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

В качестве примера рассмотрим образец, в котором чередуются мягкие и твердые слои. Слои с нечетными номерами выполнены из резиноподобного материала, сдвиговый модуль которого на несколько порядков меньше модуля объемного сжатия. Слои с четными номерами выполнены из обычного твердого материала, в котором величины сдвиговой и объемной упругости одного порядка. При сдвиговых колебаниях такого образца только мягкие слои испытывают деформацию, в то время как твердые слои не деформируются, а смещаются как целое. В такой структуре можно добиваться значительных сдвиговых деформаций в слоях из резиноподобного материала на низких частотах. Максимальные сдвиговые смещения и деформации в слоях достигаются при колебаниях на первой резонансной частоте. При этом деформация тем выше, чем меньше толщина слоя при фиксированном отношении  $W_L/W_0$ . В однородном слое толщиной  $L$  частота первого резонанса растет с уменьшением толщины, что не позволяет получать значительные деформации в тонких однородных слоях. В многослойной структуре с твердыми слоями последние играют роль рассредоточенной массы и понижают частоту первого резонанса даже при малых толщинах мягких слоев. Это позволяет создавать структуры с управляемыми как линейными, так и нелинейными упругими параметрами и обеспечивать наблюдение нелинейных волновых эффектов в компактных объемах. Подробный обзор нелинейных эффектов в резонаторах в режиме образования ударных фронтов содержится в работе [12].

Расчеты и измерения были проведены для резонатора с 11-слойной структурой толщиной  $L = 32$  мм и поперечными размерами  $7 \times 4$  см, нагруженной пластиной массой  $M = 10.87$  г. Шесть мягких слоев одинаковой толщины 2 мм были изготовлены из полимерного материала пластисола (производитель MF Manufacturing, США). Мягкие слои контактировали с нижней и верхней пластинами. Измерения сдвигового модуля, выполненные статическим методом по вдавливанию жесткого шарика в однородный слой пластисола, дали значение модуля  $24 \pm 3$  кПа. Пять твердых слоев, расположенных между слоями пластисола, представляли собой пластины из дюралюминия толщиной 4 мм.

Измерения выполнялись на экспериментальной установке, которая подробно описана в работе [10]. Резонатор закреплялся на нижней пластине, которая жестко соединялась с вибратором типа 4810 (Брюль и Кьер, Дания). На вибратор через усилитель низкой частоты LV 103 (Роботрон, Германия) подавалось напряжение синусоидальной формы с генератора сигналов AFG 3021B (Тектроникс, США). Два миниатюрных акселеромет-



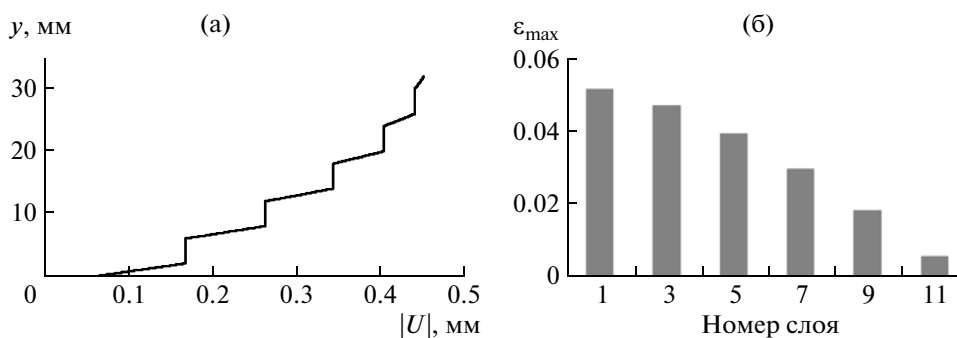
**Рис. 2.** Отношение амплитуд ускорений верхней и нижней пластин в резонаторе с 11-слойной структурой (6 слоев пластисола толщиной 2 мм и 5 слоев дюралюминия толщиной 4 мм). Точками показаны результаты измерений, линией – расчеты для параметров пластисола  $\mu = 25.3$  кПа,  $\eta = 8.4$  Па · с. На вставках: результаты измерений и расчетов вблизи второй ( $\mu = 29$  кПа,  $\eta = 4.8$  Па · с) и третьей ( $\mu = 30$  кПа,  $\eta = 3.5$  Па · с) резонансной частоты.

ра 4374 (Брюль и Кьер, Дания) размещались на верхней и нижней пластинах и измеряли ускорения этих пластин. Сигналы акселерометров через усилители заряда 2635 (Брюль и Кьер, Дания) подавались на входы двухканального цифрового осциллографа TDS 3032B (Тектроникс, США). Оцифрованные сигналы с осциллографа через GPIB интерфейс поступали в компьютер, где производилось вычисление отношения амплитуд ускорений. Измерения проводились при фиксированной амплитуде ускорения нижней пластины с шагом по частоте 0.1 Гц. Для этого при каждом изменении частоты амплитуда напряжения на вибраторе подбиралась так, чтобы амплитуда ускорения нижней пластины приняла заданное значение.

Результаты измерений для резонатора с 11-слойной структурой показаны на рис. 2 точками. Первые три резонанса наблюдаются на частотах 44.5 и 140 и 230 Гц, при этом с увеличением номера резонанса величина резонансного пика уменьшается, а ширина соответствующей резонансной кривой увеличивается. Значения сдвигового модуля и сдвиговой вязкости пластисола подбирались таким образом, чтобы расчетная резонансная кривая вблизи частоты первого резонанса наилучшим образом соответствовала результатам измерений. Сдвиговый модуль дюралюминия при этом полагался равным  $42 \times 10^6$  кПа, а сдвиговая вязкость считалась нулевой. На рис. 2 полученная расчетная кривая показана сплошной линией. Таким образом были определены значения сдвигового модуля пластисола  $\mu = 25.3 \pm 0.8$  кПа и коэффициента сдвиговой вяз-

кости  $\eta = 8.4 \pm 0.4$  Па · с на частотах вблизи первого резонанса. Как уже было отмечено в [10], вязкоупругие параметры пластисола зависят от частоты. Поэтому на частотах выше 125 Гц наблюдается несовпадение результатов измерений с кривой, рассчитанной для вязкоупругих параметров на частоте первого резонанса 44.5 Гц. На частотах выше 125 Гц вязкоупругие параметры определялись по совпадению расчетных и экспериментальных кривых вблизи частот второго и третьего резонансов (вставки к рис. 2). В результате были получены значения для сдвигового модуля и коэффициента сдвиговой вязкости  $\mu = 29 \pm 1$  кПа,  $\eta = 4.8 \pm 0.3$  Па · с и  $\mu = 30 \pm 1$  кПа,  $\eta = 3.5 \pm 0.4$  Па · с на частотах второго (140 Гц) и третьего (230 Гц) резонансов соответственно.

Для определения сдвиговых деформаций в различных слоях пластисола был рассчитан профиль амплитуды поперечного смещения частиц в стоячей волне  $U(y)$  на первой резонансной частоте. Профиль волны на частоте 44.5 Гц при амплитуде ускорения нижней пластины  $W_0 = 5$  м/с<sup>2</sup> в момент времени, соответствующий максимальному смещению верхней границы резонатора, показан на рис. 3,а. На первой резонансной частоте на толщине структуры  $L$  укладывается немногим менее четверти длины сдвиговой волны. Наклонные участки профиля соответствуют смещениям частиц в мягких слоях пластисола. Дюралюминиевые пластины смещаются целиком, без деформации, что показано вертикальными отрезками прямых на волновом профиле. Поскольку профиль волны меняется со временем, то максимальная деформация наблюдается только в мо-



**Рис. 3.** Профиль амплитуды смещения частиц в стоячей волне на первой резонансной частоте 44.5 Гц при амплитуде ускорения нижней пластины  $W_0 = 5 \text{ м/с}^2$  в момент времени, соответствующий максимальному смещению верхней границы резонатора. Наклонными и вертикальными линиями показаны смещения в слоях пластисола и дюралюминия (а). Распределение относительной деформации по слоям пластисола (б).

менты времени, соответствующие максимальному смещению верхней границы резонатора от положения равновесия. Максимальная относительная деформация в каждом слое для профиля, показанного на рис. 3,а, рассчитывалась по формуле:  $\varepsilon_{\max} = \Delta U_n / L_{\text{pl}}$ , где  $\Delta U_n$  – разность амплитуд смещения на верхней и нижней границах слоя,  $L_{\text{pl}} = 2 \text{ мм}$  – толщина слоя пластисола. На рис. 3,б приведено распределение относительной сдвиговой деформации по слоям пластисола. Деформация максимальна в нижних слоях и уменьшается при приближении к верхней границе. Значение деформации в нижнем слое пластисола ( $n = 1$ ) составляет 0.052, что более чем в 4 раза превышает деформацию, усредненную по всей толщине образца.

Частота первого резонанса в резонаторе с многослойной структурой зависит от числа слоев. С ростом числа слоев резонансная частота уменьшается, а коэффициент усиления по ускорению растет. Например, для структуры из слоев пластисола и дюралюминия, резонансная частота изменяется от 65 Гц (для  $N = 7$ ) до 27 Гц ( $N = 19$ ). Выбирая материалы с различной плотностью для твердых слоев, можно также изменять резонансную частоту и усиление в резонаторе с многослойной структурой.

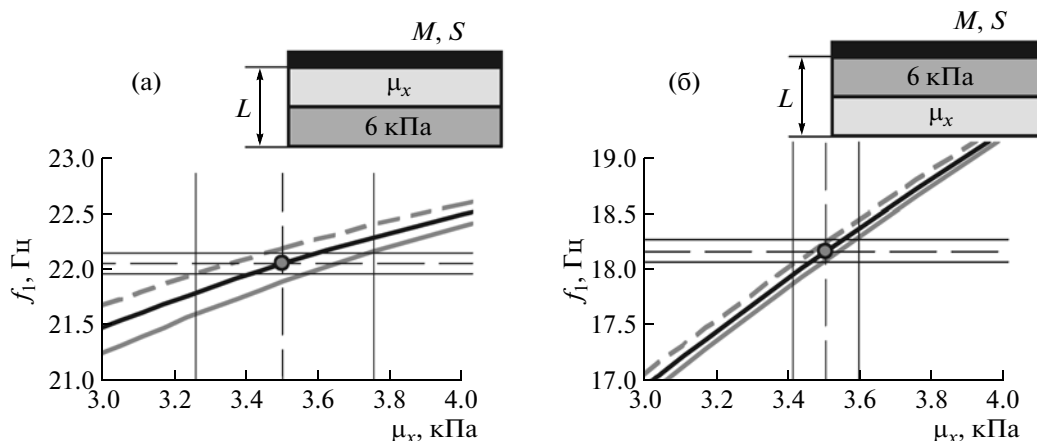
### ИЗМЕРЕНИЕ СДВИГОВОГО МОДУЛЯ ОДНОГО ИЗ СЛОЕВ В ДВУХСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ

Двухслойная структура представляет собой простую модель неоднородной среды. Сдвиговый модуль одного из слоев может быть определен по измеренным резонансным кривым резонатора с двухслойной структурой при условии, что сдвиговый модуль другого слоя известен.

Расчеты проводились для резонатора со структурой, в которой сдвиговый модуль более жестко-

го слоя был известен и составлял 6.0 кПа. Сдвиговый модуль второго слоя был примерно в 2 раза меньше первого, однако его точное значение считалось неизвестным. Коэффициент сдвиговой вязкости был одинаков в обоих слоях и составлял 3.5 Па · с. Для обозначения параметров слоев с известным и неизвестным сдвиговыми модулями будем использовать индексы “0” и “х” соответственно. Двухслойная структура имела форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами 39 и 70 мм и толщиной 26 мм. При расчетах резонансных кривых предполагалось, что на верхней границе структуры находится твердая пластина массой 3 г, что соответствовало экспериментальным условиям.

На рис. 4 представлены зависимости первой резонансной частоты двухслойного образца от модуля сдвига  $\mu_x$ . Графики на рис. 4,а и 4,б соответствуют случаям, когда слой с известным модулем 6.0 кПа находится снизу и сверху соответственно. Черными жирными линиями показаны зависимости первой резонансной частоты, рассчитанные при условии, что толщины обоих слоев одинаковы. Следует отметить, что значения резонансных частот в случае, когда более жесткий слой находится внизу (рис. 4,а) выше, чем когда он располагается сверху (рис. 4,б). По значениям резонансных частот, измеренных в первом и во втором случаях (показаны точками на рис. 4) можно определить значения сдвигового модуля в более мягком слое. Он составил 3.5 кПа, что совпало с величиной, полученной по измерениям статическим методом вдавливания жесткого шарика. Погрешность измерения резонансной частоты, показанная двумя тонкими горизонтальными линиями на рис. 4, в наших условиях составляла 1%. Эта погрешность приводит к соответствующей погрешности в определении сдвигового модуля. Поскольку значение производной  $df_1/d\mu_x$  на рис. 4,б выше, чем на рис. 4,а, то при указанном алгоритме определения сдвигово-



**Рис. 4.** Рассчитанные зависимости первой резонансной частоты от модуля сдвига мягкого слоя для случая, когда мягкий слой находится сверху (а) и снизу (б). Черной линией показаны результаты расчетов при одинаковой толщине слоев, равной 13 мм. Те же зависимости при толщине верхнего слоя 13.65 мм, а нижнего – 12.35 мм (серые пунктирные линии); при толщине верхнего слоя 12.35 мм, а нижнего – 13.65 мм (серые сплошные линии). Точкой на графиках отмечено измеренное значение частоты.

го модуля, его погрешность будет меньше в случае, когда более мягкий слой с неизвестным модулем находится снизу. По результатам измерений было получено:  $\mu_x = 3.5 \pm 0.3$  кПа (слой сверху),  $\mu_x = 3.5 \pm 0.1$  кПа (слой снизу).

На практике толщина отдельного слоя может быть определена с некоторой погрешностью. Это связано с технологией изготовления слоистых образцов, диффузией компонентов, отвечающих за жесткость полимера, неровностью границы слоя. При этом толщина всего образца может быть выдержана с хорошей точностью. Поэтому была проведена оценка погрешности в определении сдвигового модуля при наличии 5% погрешности

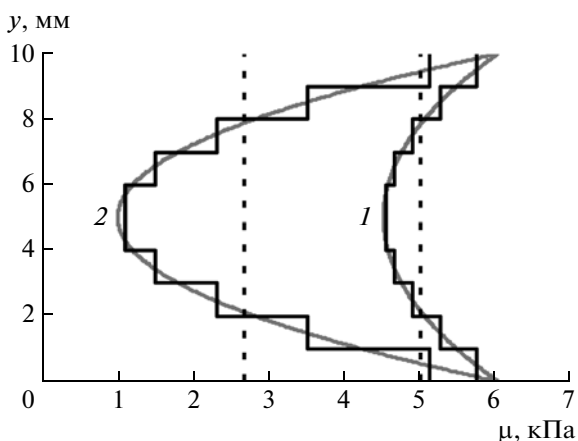
в определении толщины каждого из слоев. На рис. 4 серыми пунктирными линиями показаны зависимости первой резонансной частоты от модуля сдвига мягкого слоя, рассчитанные для случая, когда толщина верхнего слоя составляет 13.65 мм, а нижнего – 12.35 мм. Сплошными серыми линиями показаны зависимости, рассчитанные в случае, когда верхний слой имеет толщину 12.35 мм, а толщина нижнего слоя 13.65 мм. Неопределенность в толщине слоя в  $\pm 5\%$  приводит к удвоению погрешности в определении сдвигового модуля.

#### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ ДЛЯ РАСЧЕТА РЕЗОНАТОРОВ С НЕОДНОРОДНОЙ РЕЗИНОПОДОБНОЙ СРЕДОЙ

Модель слоистой среды оказывается удобной при изучении сред, в которых сдвиговый модуль меняется известным образом вдоль одной координаты.

Рассмотрим два образца толщиной 10 мм, в которых модуль сдвига зависит от глубины по квадратичному закону и имеет минимум на половине толщины (рис. 5). Модуль сдвига на поверхности обоих образцов – одинаковый и равен 6 кПа, минимальные значения в первом и втором образцах равны соответственно 4.5 и 1.0 кПа. Образцы имели форму параллелепипеда с размерами сторон 40 и 70 мм.

Для расчета резонансных кривых резонаторов с указанными образцами они разбивались на 10 слоев одинаковой толщины 1 мм с постоянным значением модуля сдвига в каждом слое. Значение сдвигового модуля в слое определялось из исходного распределения в середине этого



**Рис. 5.** Распределение модуля сдвига по толщине в образцах 1 и 2 (линии серого цвета). Разбиение образцов на 10 слоев одинаковой толщины с постоянным значением модуля сдвига в каждом слое (линии черного цвета). Штриховыми линиями отмечены значения эффективного сдвигового модуля  $\mu_{\text{эф}}$ .

**Таблица 1.** Значения модулей сдвига (кПа) в слоях для образцов 1 и 2

Образец \ Номер слоя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5.73	5.25	4.89	4.65	4.53	4.53	4.65	4.89	5.25	5.73
2	5.1	3.5	2.3	1.5	1.1	1.1	1.5	2.3	3.5	5.1

слоя. Полученные ступенчатые распределения показаны на рис. 5 сплошными линиями черного цвета. В двух центральных слоях около вершин парабол были заданы одинаковые значения модуля сдвига. В таблице 1 приведены значения модуля сдвига в каждом слое для обоих образцов. Коэффициент сдвиговой вязкости считался одинаковым для обоих образцов и составлял  $2 \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Был произведен расчет сдвиговых волн в резонаторе с неоднородными образцами, на верхней границе которых находилась твердая пластина массой  $8 \text{ г}$ .

В таблице 2 приведены результаты расчета первой резонансной частоты для резонаторов с обоими образцами. Частота  $f_{1L}$  получена с учетом разбиения образцов на 10 слоев. Для сравнения приведена частота  $f_{10}$ , которая была получена при числе слоев, равном 150, когда распределение модуля сдвига по толщине образца можно считать непрерывным. Это значение считалось как точное, соответствующее параболическому профилю неоднородности. Для первого образца, где неоднородность слабее, чем во втором, разбиение на 10 слоев уже приводит к результату, совпадающему с точным. При этом резонансные кривые также совпадают с высокой степенью точности. Для резонатора со вторым образцом, где неоднородность гораздо более выражена, значения частот отличаются на  $0.5 \text{ Гц}$ , что не превышает  $2\%$ . Увеличение числа слоев до 20 приводит к точному результату. Следует отметить, что в случае слабой неоднородности (образец 1) приближение однородного образца с эффективным модулем, вычисляемым по формуле

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{1}{L} \int_0^L \mu(y) dy \quad (16)$$

приводит к результату, который близок к точному. Однако для сильно неоднородного образца такое приближение дает значительно завышенный результат. То есть эффективная упругость образца, рассчитанная по формуле (16), выше, чем ее реальное значение.

## ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Слоистые резиноподобные среды представляют интерес для исследования и как самостоятель-

ный объект, и в качестве модели для изучения волновых процессов в более сложных неоднородных средах. В настоящей работе описан алгоритм решения прямой задачи, когда по известным вязкоупругим параметрам слоев находятся амплитуды стоячих волн, возникающих в одномерной слоистой структуре под действием гармонического источника. Показывается, что структура, состоящая из набора слоев с различной упругостью, обладает резонансными свойствами, которые определяются как геометрией расположения слоев, так и их вязкоупругими параметрами.

Актуальная для целей диагностики обратная задача решается для простого случая двухслойной структуры. Показывается, что значение первой резонансной частоты может быть использовано для однозначного определения сдвигового модуля одного из слоев при условии, что упругость второго слоя известна. Неопределенность в значениях толщин слоев приводит к дополнительной погрешности в определении сдвигового модуля с использованием предложенного метода. Анализ погрешности проведен для случая, когда толщина слоев известна с погрешностью  $\pm 5\%$ . Для двухслойной структуры можно провести два измерения резонансной частоты: когда слой с определяемым модулем расположен внизу в первом случае и сверху – во втором. Оказывается, что погрешность в определении сдвигового модуля становится меньше, если слой с неизвестной упругостью находится под более упругим слоем.

Подбором слоев с различной сдвиговой упругостью можно управлять как резонансными характеристиками получаемой слоистой структуры, так и ее механическими параметрами. Иначе говоря, можно создавать материалы с заданными вязкоупругими характеристиками. На примере структуры с твердыми дюралюминиевыми пла-

**Таблица 2.** Значения первой резонансной частоты для образцов 1 и 2. Частота  $f_{10}$  соответствует точному решению,  $f_{1L}$  рассчитана для 10 слоев,  $f_{\text{eff}}$  соответствует однородным образцам с эффективным сдвиговым модулем  $\mu_{\text{eff}}$ 

Образец	$f_{10}$ , Гц	$f_{1L}$ , Гц	$f_{\text{eff}}$ , Гц
1	43.6	43.6	43.8
2	26.8	27.3	32

стинами, перемежаемыми тонкими слоями резиноподобного полимера, показано, что в отдельных слоях полимера создаются локальные сдвиговые деформации, в несколько раз превышающие значения, усредненные по структуре. В таких слоях возможно проявление нелинейных свойств резиноподобного материала уже при относительно небольших амплитудах колебаний всей структуры. В частности, пластисол, используемый в наших экспериментах, увеличивает сдвиговую упругость с ростом деформации [13]. Этот эффект становится заметным при превышении уровня относительных деформаций в 20%, что достижимо в отдельных слоях даже при небольших амплитудах возбуждения колебаний. Таким образом, получается структура, в которой упругость становится нелинейной функцией деформации, причем локализация области с увеличенной упругостью зависит от частоты колебаний. Такие модели, где упругость растет по заданному закону с ростом деформации, представляют практический интерес для создания фантомов мышечных волокон [14] и построения их теоретических моделей [15].

Результаты, полученные для стоячих волн в дискретных многослойных структурах, обобщаются на случай сред с непрерывным распределением сдвигового модуля. При этом используется подход, при котором непрерывное распределение заменяется набором слоев, в каждом из которых сдвиговой модуль постоянен. Использование относительно небольшого числа таких слоев (30–40) позволяет получать достаточно точные решения для стоячих волн в средах с явно выраженной неоднородностью.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 08-02-00368.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sarvazyan A.P., Rudenko O.V., Swanson S.D., Fowlkes J.B., Emelianov S.Y. Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnostics // *Ultrasound Med. Biol.* 1998. V. 24. № 9. P. 1419–1435.
2. Carstensen E.L., Parker K.J., Lerner R.M. Elastography in the management of liver disease // *Ultrasound Med. Biol.* 2008. V. 34. № 10. P. 1535–1546.
3. Еремин Е.В., Тиманин Е.М. Интерпретация механического импеданса слоя, измеренного с помощью твердого круглого штампа // *Акуст. журн.* 2000. Т. 46. № 4. С. 490–495.
4. Ophir J., Céspedes E.I., Ponnekanti H., Yazdi Y., Li X. Elastography: a quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues // *Ultrason. Imag.* 1991. V. 13. № 2. P. 111–134.
5. Андреев В.Г., Дмитриев В.Н., Пищальников Ю.А., Руденко О.В., Сапожников О.А., Сарвазян А.П. Наблюдение сдвиговых волн, возбужденных сфокусированным ультразвуком в резиноподобной среде // *Акуст. журн.* 1997. Т. 43. № 2. С. 123–128.
6. Tanter M., Bercoff J., Athanasiou A., Deffieux T., Gennisson J.-L., Montaldo G., Muller M., Tardivon A., Fink M. Quantitative assessment of breast lesion viscoelasticity: initial clinical results using supersonic shear imaging // *Ultrasound Med. Biol.* 2008. V. 34. № 9. P. 1373–1386.
7. Скворода А.Р., Агьямов С.Р. Определение механических свойств многослойной вязкоупругой среды по данным измерений импеданса // *Биофизика.* 1998. Т. 43. № 2. С. 348–352.
8. Ведерников А.В., Андреев В.Г. Измерение распределения сдвигового модуля упругости в неоднородных резиноподобных средах // *Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия.* 2006. № 3. С. 49–53.
9. Yapp R.D., Insana M.F. pH-induced contrast in viscoelasticity imaging of biopolymers // *Phys. Med. Biol.* 2009. V. 54. № 5. P. 1089–1109.
10. Андреев В.Г., Крит Т.Б., Сапожников О.А. Стоячие волны в упругом слое, нагруженном конечной массой // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 2. С. 190–196.
11. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2001. 160 с.
12. Rudenko O.V. Nonlinear standing waves, resonance phenomena, and frequency characteristics of distributed systems // *Acoust. Phys.* 2009. V. 55. № 1. P. 27–54.
13. Андреев В.Г., Бурлакова Т.А. Измерения сдвиговой упругости и вязкости резиноподобных материалов // *Акуст. журн.* 2007. Т. 53. № 1. С. 50–54.
14. Storm C., Pastore J.J., MacKintosh F.C., Lubensky T.C., Janmey P.A. Nonlinear elasticity in biological gels // *Nature.* 2005. V. 435. P. 191–194.
15. Руденко О.В., Сарвазян А.П. Волновая биомеханика скелетной мышцы // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 6. С. 833–846.