

УДК 534.222

## НЕЛИНЕЙНОЕ ИСКАЖЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ МОЩНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДЕ СО СТЕПЕННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ ОТ ЧАСТОТЫ

© 2000 г. С. С. Кащеева, О. А. Сапожников, В. А. Хохлова, М. А. Аверкью\*, Л. А. Крам\*\*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
119899 Москва, Воробьевы горы  
E-mail: oleg@acs366b.phys.msu.su

\*ATL Ultrasound, 22100 Bothell Everett Hwy, P.O.Box 3003, Bothell, WA 98041–3003, USA

\*\*Applied Physics Laboratory, 1013 NE 40th Street, University of Washington, Seattle, WA 98105, USA

Поступила в редакцию 15.02.99 г.

Теоретически исследовано нелинейное распространение периодической волны и одиночного импульса с ударным фронтом в среде со степенной зависимостью коэффициента поглощения от частоты и соответствующим ей законом дисперсии. Для численного моделирования использовался модифицированный спектральный подход. Показано, что значение показателя степени в законе поглощения оказывает существенное влияние на эффективность нелинейных взаимодействий, искажение волнового профиля и поглощение акустической энергии в нелинейном режиме. Исследована устойчивость разрывной структуры ударного фронта волны для различных степенных законов поглощения, близких к линейному. Рассмотрена возможность импульсной диагностики параметров степенного закона поглощения среды по виду прошедшего по ней одиночного импульса с ударным фронтом.

Нелинейные эффекты, проявляющиеся при распространении мощных акустических волн в поглощающих средах, детально исследованы для случаев классических жидкостей с квадратичной зависимостью поглощения от частоты и для сред с одним временем релаксации [1, 2]. Однако многие акустические среды, например, биологические ткани [3] и морские осадки [4], обладают степенным законом поглощения, отличным от квадратичного закона. Теоретическое описание нелинейных взаимодействий в таких средах связано с решением достаточно сложных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, поэтому соответствующие задачи исследованы гораздо менее полно. Однако они важны для многих современных практических приложений мощного ультразвука, особенно для медицинской акустики: гипертермии, акустической хирургии [3, 5], экстракорпоральной литотрипсии [6]. Безусловный интерес также представляет и фундаментальный аспект данной проблемы, особенно в случае исследования сильно искаженных нелинейных возмущений, содержащих крутые участки – ударные фронты.

В данной работе теоретически исследуются особенности нелинейного распространения периодического и импульсного возмущений в таких средах, влияние параметров степенного закона поглощения на эволюцию профиля, структуру ударного фронта и поглощение волны. В развитой математической модели учитываются нелинейные эффекты, поглощение и дисперсия ско-

рости звука. Для численных расчетов используется модифицированный спектральный метод [7, 8], позволяющий описывать сильно искаженные волны с разрывами с помощью небольшого количества гармоник. Характерные параметры среды и исходных сигналов выбраны близкими к используемым в ультразвуковой терапии. Обсуждается возможность импульсной диагностики параметров частотного закона поглощения мощными одиночными импульсами с ударным фронтом.

Будем описывать распространение акустической волны конечной амплитуды в среде с произвольным законом поглощения и дисперсии уравнением типа Бюргерса:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\epsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = L(p). \quad (1)$$

Здесь  $p$  – акустическое давление,  $x$  – координата распространения волны,  $\tau = t - x/c_0$  – время в бегущей системе координат,  $c_0$  – фазовая скорость звука на характерной частоте  $\omega_0$ ,  $\epsilon$  – коэффициент акустической нелинейности среды,  $L(p)$  – линейный оператор, отвечающий за поглощение и дисперсию.

Если предположить степенную зависимость коэффициента поглощения

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 (\omega/\omega_0)^n, \quad (2)$$

то однозначным образом реконструировать вид правой части  $L(p)$  уравнения (1) с соблюдением

принципа причинности не удастся. Это обусловлено тем, что зависимость вида (2) не может выполняться во всем бесконечном диапазоне частот; в частности, на высоких частотах  $\alpha(\omega)$  имеет тенденцию к насыщению [9]. Неоднозначность выбора оператора  $L(p)$ , отвечающего закону поглощения (2) и принципу причинности, связана с возможностью различного моделирования поглощения на высоких частотах. Известно несколько различных наиболее часто используемых интегральных форм  $L(p)$  [4, 10–13]. Решение указанных интегро-дифференциальных уравнений для исследования распространения сильно искаженных нелинейных волн является весьма сложной проблемой. Даже при численном моделировании интегральный характер уравнений приводит к необходимости проведения операции свертки на каждом шаге схемы, что существенно затрудняет и замедляет расчеты [14], приближенные аналитические решения удается получить лишь в некоторых частных случаях [13].

Более эффективным для описания нелинейных волн в средах со степенным законом поглощения является спектральный подход, который и используется в данной работе. При таком описании рассматривается связанная система уравнений для бесконечного числа гармоник, для каждой из которых учитывается соответствующие поглощение и дисперсия.

Будем считать, что в широкой полосе частот закон поглощения описывается степенной функцией (2). Согласно принципу причинности, можно выписать интегральные дисперсионные соотношения типа Крамерса–Кронига, связывающие закон поглощения и дисперсию скорости звука [9, 15]. В случае плавного характера зависимости поглощения от частоты, найти связь между поглощением и дисперсией можно приближенно, используя так называемые локальные дисперсионные соотношения [15]. Полученные зависимости для скорости звука и заданный закон поглощения позволяют рассчитать нелинейное распространение волны без реконструирования эволюционного уравнения типа (1).

Перейдем в уравнении (1) к безразмерным переменным:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - NV \frac{\partial V}{\partial \theta} = L'(V), \quad (3)$$

где  $V = p/p_0$  – акустическое давление, нормированное на характерное амплитудное значение  $p_0$ ,  $\theta = \omega_0 t$  – время в сопровождающей системе координат,  $z = x/x_{\text{погл}}$  – координата распространения волны, измеряемая в длинах поглощения  $x_{\text{погл}} = 1/\alpha_0$ ,  $\alpha_0$  – коэффициент поглощения на частоте  $\omega_0$ ,  $\omega_0$  – характерная частота акустического сигнала, для импульсного возмущения исходной длительности  $t_0$  частота выбирается равной  $\omega_0 = 1/t_0$ ,

$x_{\text{нел}} = c_0^3 \rho_0 / \epsilon p_0 \omega_0$  – длина образования разрыва для гармонической волны в отсутствие поглощения,  $N = x_{\text{погл}} / x_{\text{нел}}$  – безразмерный параметр нелинейности, оператор  $L'(V)$  соответствует исходному оператору  $L(p)$ , записанному в новых переменных.

Представим решение уравнения (3) в виде Фурье-разложения

$$V(z, \theta) = C_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} C_n(z) \exp(-in\theta), \quad (4)$$

тогда после подстановки решения (4) в уравнение (3) получим следующую связанную систему бесконечного числа нелинейных уравнений для Фурье-компонент:

$$\begin{aligned} \frac{dC_n}{dz} = & -\frac{in}{2} N \times \\ & \times \left( 2C_0 C_n + \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k C_{k-n}^* \right) + \\ & + iK'(n)C_n - K''(n)C_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $K'$  и  $K''$  – действительная и мнимая части безразмерного волнового числа  $K(n) = K' + iK''$ . Они описывают соответственно дисперсию ( $K'$ ) и поглощение ( $K''$ ) звука и в сопровождающей временной системе координат  $\theta = \omega_0(t - x/c_0)$  имеют вид:

$$K''(n) = \alpha(n\omega_0) / \alpha_0, \quad (6)$$

$$K'(n) = n\omega_0(1/(c(n\omega_0)) - 1/c_0) / \alpha_0.$$

Частотная зависимость коэффициента поглощения  $K''$  была выбрана в соответствии с экспериментальными данными для биологических тканей [3, 16], а дисперсия скорости звука  $K'$  рассчитывалась с использованием локальных дисперсионных соотношений [15]:

$$\alpha(\omega) = \frac{\pi \omega^2}{2c_0^2} \frac{dc(\omega)}{d\omega}, \quad (7)$$

$$\Delta c = c(\omega) - c_0 = \frac{2c_0^2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\alpha(\omega')}{(\omega')^2} d\omega'. \quad (8)$$

Для закона поглощения (2) рассчитанная по соотношению (8) дисперсия скорости звука имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\Delta c}{c_0} = & \frac{c(\omega) - c_0}{c_0} = \\ = & \frac{2c_0 \alpha_0}{\pi(\eta - 1)\omega_0} \left\{ \left( (\omega/\omega_0)^\eta - 1 \right), \eta \neq 1 \right. \\ & \left. \ln(\omega/\omega_0), \eta = 1. \right. \end{aligned} \quad (9)$$

Выберем параметры, задающие закон поглощения, близкими к параметрам биологических сред или фантому биологической ткани 1.3 бутандиолу [16]. На рис. 1а представлены зависимости коэффициента поглощения, нормированного на его значение  $\alpha_0$  при 1 МГц, от частоты. Кривые на рисунке построены для крови ( $\eta = 1.42$ ,  $\alpha_0 = 0.025 \text{ см}^{-1}$ ,  $c_0 = 1570 \text{ м/с}$ ), печени ( $\eta = 1.2$ ,  $\alpha_0 = 0.082 \text{ см}^{-1}$ ,  $c_0 = 1600 \text{ м/с}$ ) [3]; воды ( $\eta = 2$ ,  $\alpha_0 = 0.0003 \text{ см}^{-1}$ ,  $c_0 = 1500 \text{ м/с}$ ) и бутандиола ( $\eta = 1$ ,  $\alpha_0 = 0.038 \text{ см}^{-1}$ ,  $c_0 = 1546 \text{ м/с}$ ). Рассчитанная по этим данным дисперсия скорости звука (9) представлена на рис. 1б. Из рисунка видно, что бутандиол является близким по своим дисперсионным характеристикам к крови. Приведенные теоретические кривые дисперсии хорошо согласуются с известными экспериментальными данными [3], согласно которым величина дисперсии скорости звука в биологических тканях не превышает 1% в диапазоне 1–10 МГц.

Для численного интегрирования системы уравнений (5) использовался модифицированный спектральный подход, основанный на априорном знании высокочастотной асимптотики спектра ударной волны. Основная идея подхода, развитого в работе [7], заключается в замене точной системы бесконечного числа уравнений (5) приближенной системой для амплитуд первых  $N_{\max}$  гармоник:

$$\frac{dC_n}{dz} = -inN \left\{ C_0 C_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} + \sum_{k=n+1}^{N_{\max}} C_k C_{k-n}^* + \sum_{k=N+1}^{N_{\max}-n} \tilde{C}_k C_{k-n}^* \right\} \quad (10)$$

$$+ \left( \frac{A_s}{2\pi} \right)^2 \frac{\exp(in\theta_s)}{n} \sum_{k=N_{\max}+1}^{N_{\max}+n} \frac{1}{k} \left\} + iK'(n)C_n - K''(n)C_n.$$

В правой части (10) амплитуды гармоник с номерами  $n > N_{\max}$  аппроксимированы их асимптотическими значениями

$$\tilde{C}_n = iA_s \exp(in\theta_s) / 2\pi n, \quad (11)$$

соответствующими спектру пилообразной волны с амплитудой  $A_s$  и положением разрыва  $\theta_s$ . Такая замена позволяет вычислить бесконечные суммы в правой части (5) аналитически, а необходимые величины  $A_s$  и  $\theta_s$  определяются из значений последних двух спектральных компонент системы  $C_{N_{\max}-1}$  и  $C_{N_{\max}}$  в предположении, что при  $n \approx N_{\max}$

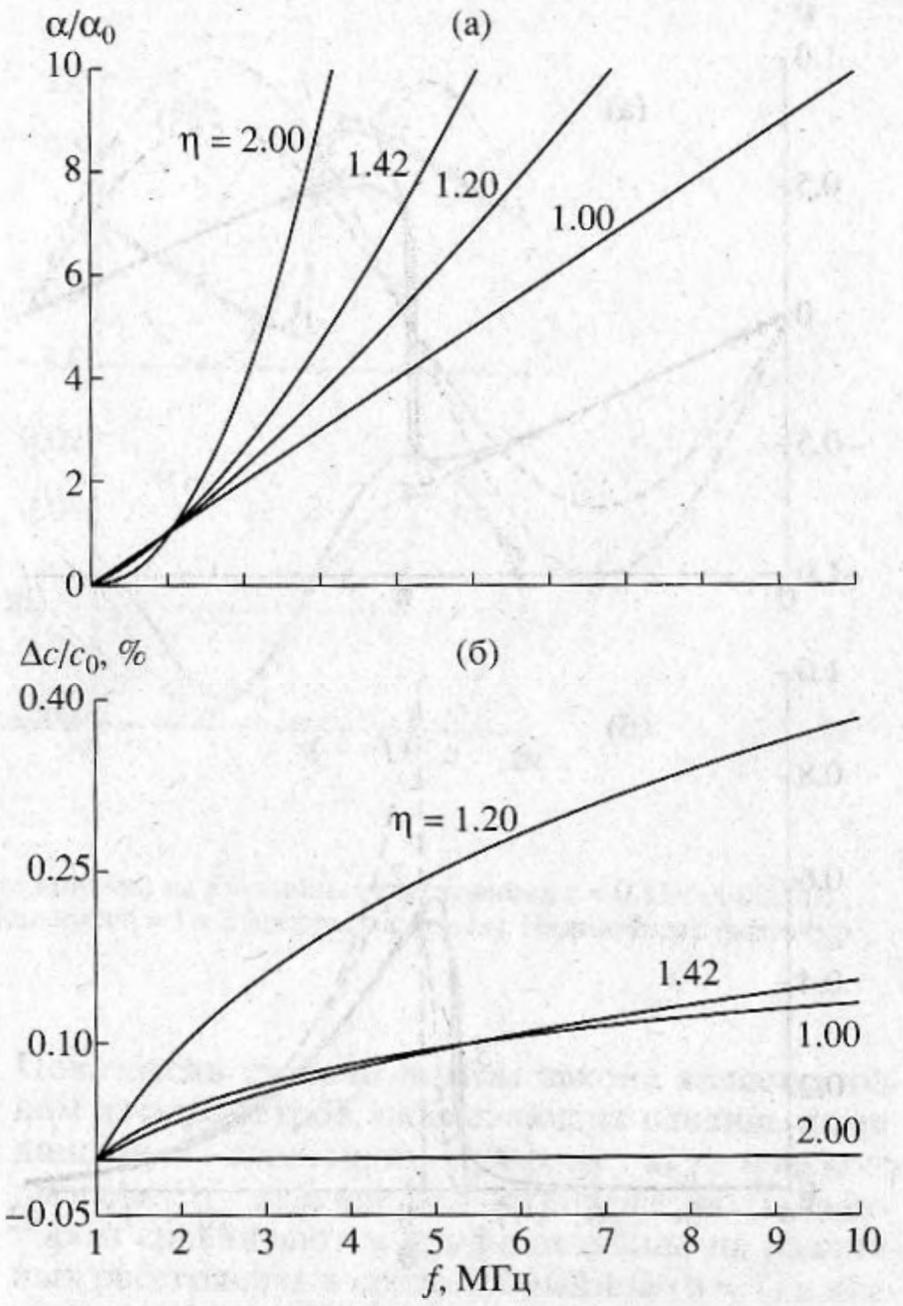


Рис. 1. Зависимости коэффициента поглощения (а) и дисперсии скорости звука (б) от частоты для различных показателей степени в законе поглощения:  $\eta = 2$  – вода, 1.42 – кровь, 1.2 – печень, 1 – бутандиол.

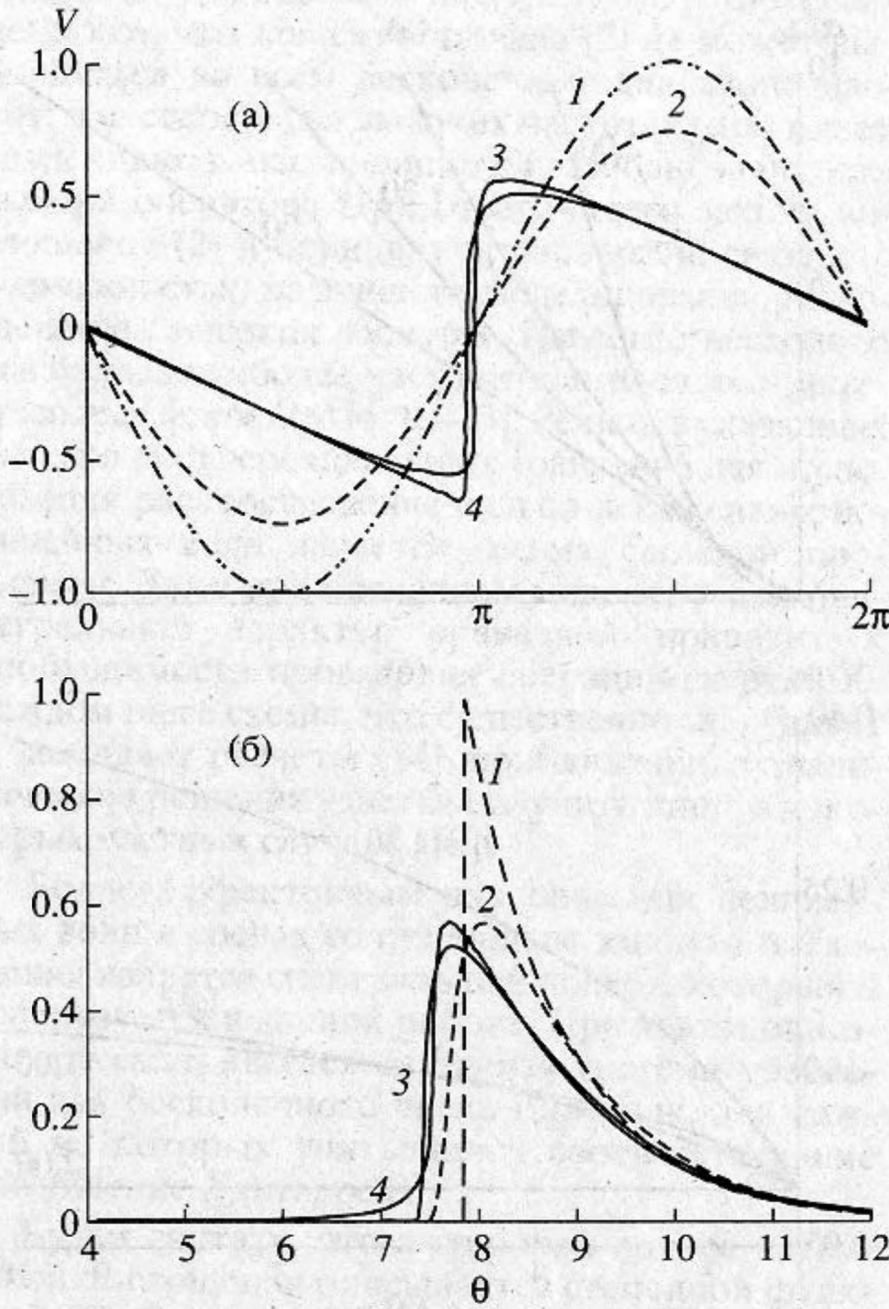
вид спектра уже мало отличается от его высокочастотной асимптотики

$$A_s = 2\pi N_{\max} |C_{N_{\max}}|, \quad \theta_s = \arg(C_{N_{\max}} / C_{N_{\max}-1}). \quad (12)$$

Развитый метод позволяет с высокой точностью моделировать распространение волн с узкими ударными фронтами, используя небольшое количество гармоник  $N_{\max}$ , порядка 30–50.

Уравнения (10) интегрировались численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности при  $N_{\max} = 50$ . Для каждого последующего шага счета по  $z$  значения  $A_s(z)$  и  $\theta_s(z)$  восстанавливались (12) из рассчитанных на предыдущем шаге значений коэффициентов  $C_{N_{\max}-1}$  и  $C_{N_{\max}}$ .

Важными характеристиками, определяющими тепловое или кавитационное воздействия на ткань, являются временной профиль волны, поведение интенсивности волны в среде, структура и ширина ударного фронта. Профиль волны вос-



**Рис. 2.** Влияние нелинейных, диссипативных и дисперсионных эффектов на эволюцию профиля волны в среде с  $\eta = 1$ .

а) Исходная волна – гармоническая (кривая 1); кривые 2–4 соответствуют  $z = 0.3$ . При расчете профиля 2 учитывалось только поглощение ( $N = 0$ ), 3 – поглощение и нелинейность ( $N = 10$ ), 4 – поглощение, нелинейность ( $N = 10$ ) и дисперсия.

б) Исходная волна – импульс с ударным фронтом (кривая 1); кривые 2–4 соответствуют  $z = 0.23$ : 2 – профиль в линейной среде ( $N = 0$ ) при учете поглощения и дисперсии; 3 – профиль в нелинейной среде ( $N = 3.3$ ) при учете поглощения и дисперсии, 4 – профиль в нелинейной среде ( $N = 3.3$ ) при учете лишь поглощения.

становливался как сумма гладкой и пилообразной составляющих по рассчитанным численно амплитудам первых  $N_{\max}$  гармоник:

$$V(\theta, z) = \sum_{n=-N_{\max}}^{N_{\max}} (C_n(z) \exp(-in\theta)) - \quad (13)$$

$$-\frac{A_s}{\pi} \sum_{n=1}^{N_{\max}} \frac{\sin(\theta - \theta_s)}{n} + \frac{A_s}{2} \begin{cases} -1 - \frac{\theta - \theta_s}{\pi}, & 0 \leq \theta \leq \theta_s \\ 1 - \frac{\theta - \theta_s}{\pi}, & \theta_s \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Рассчитывалась также средняя интенсивность волны  $I(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V^2(z, \theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n(z)|^2$ . С учетом асимптотического поведения гармоник на высоких частотах  $n > N_{\max}$  (11) она записывается в виде конечной суммы

$$I(z) = C_0^2 + \sum_{n=1}^{N_{\max}} \left( 2|C_n(z)|^2 - \frac{A_s^2}{2\pi^2 n^2} \right) + \frac{A_s^2}{12}. \quad (14)$$

Наиболее интересным с точки зрения медицинских приложений является исследование распространения интенсивной гармонической волны (ультразвуковая терапия), а также мощных одиночных импульсов с ударным фронтом (экстракорпоральная литотрипсия). Поэтому в качестве исходного акустического сигнала рассматривались гармоническая волна

$$p(\tau, x = 0) = p_0 \sin(\omega_0 \tau) \quad (15)$$

с частотой 1 МГц и амплитудой 0.5–7 МПа, соответствующей диапазону давлений, применяющихся в ультразвуковой терапии, а также ударный импульс с экспоненциальным профилем за ударным фронтом

$$p(\tau, x = 0) = \begin{cases} 0, & \tau < \tau_s \\ p_0 \exp\left(-\frac{\tau - \tau_s}{t_0}\right), & \tau > \tau_s. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь  $\tau_s$  – время появления ударного фронта импульса, начальная амплитуда  $p_0 = 3$  МПа и длительность  $t_0 = 300$  нс импульса были выбраны близкими к параметрам импульсов в литотриптерах (на выходе фокусатора, вдали от фокуса [17]) или генерируемых оптоакустическим способом в режиме плоской волны [18].

Как было показано выше, дисперсия скорости звука невелика. Однако она оказывает заметное влияние на искажение профиля акустического возмущения. На рис. 2а представлены результаты численного расчета эволюции профиля  $V = p/p_0$  исходно гармонической волны (15) в среде с линейным частотным законом поглощения  $\eta = 1$ , соответствующим по параметрам бутандиолу (рис. 1). Кривая 1 – исходный профиль волны. Кривая 2 – профиль волны на расстоянии  $z = 0.3$  (8 см) в случае линейного распространения  $N = 0$ . Профили 3 и 4 рассчитаны на том же расстоянии в случае нелинейного распространения  $N = 10$  ( $p_0 = 4.5$  МПа), соответственно без учета и с учетом дисперсии скорости звука. Видно, что влияние дисперсии проявляется в несимметричном искажении профиля волны: отрицательный полупериод становится более острым, положительный, напротив, “затягивается”, положение максимума волны сильнее отстает от фронта. Такая несим-

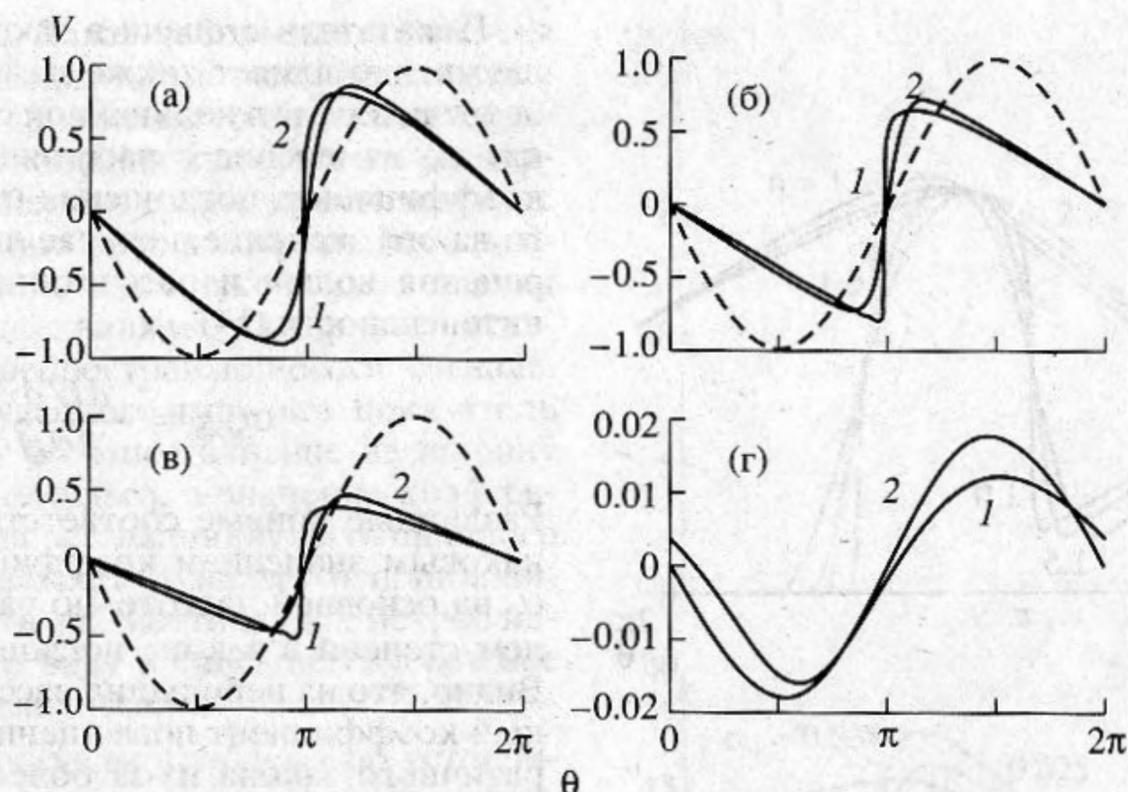


Рис. 3. Профили исходно гармонической волны (штриховые кривые) на различных расстояниях  $z = 0.13$  (а),  $0.22$  (б),  $0.4$  (в),  $3$  (г) в нелинейной среде с различными законами поглощения  $\eta = 1$  и  $2$  (цифры у кривых). Нелинейный параметр  $N = 10$ .

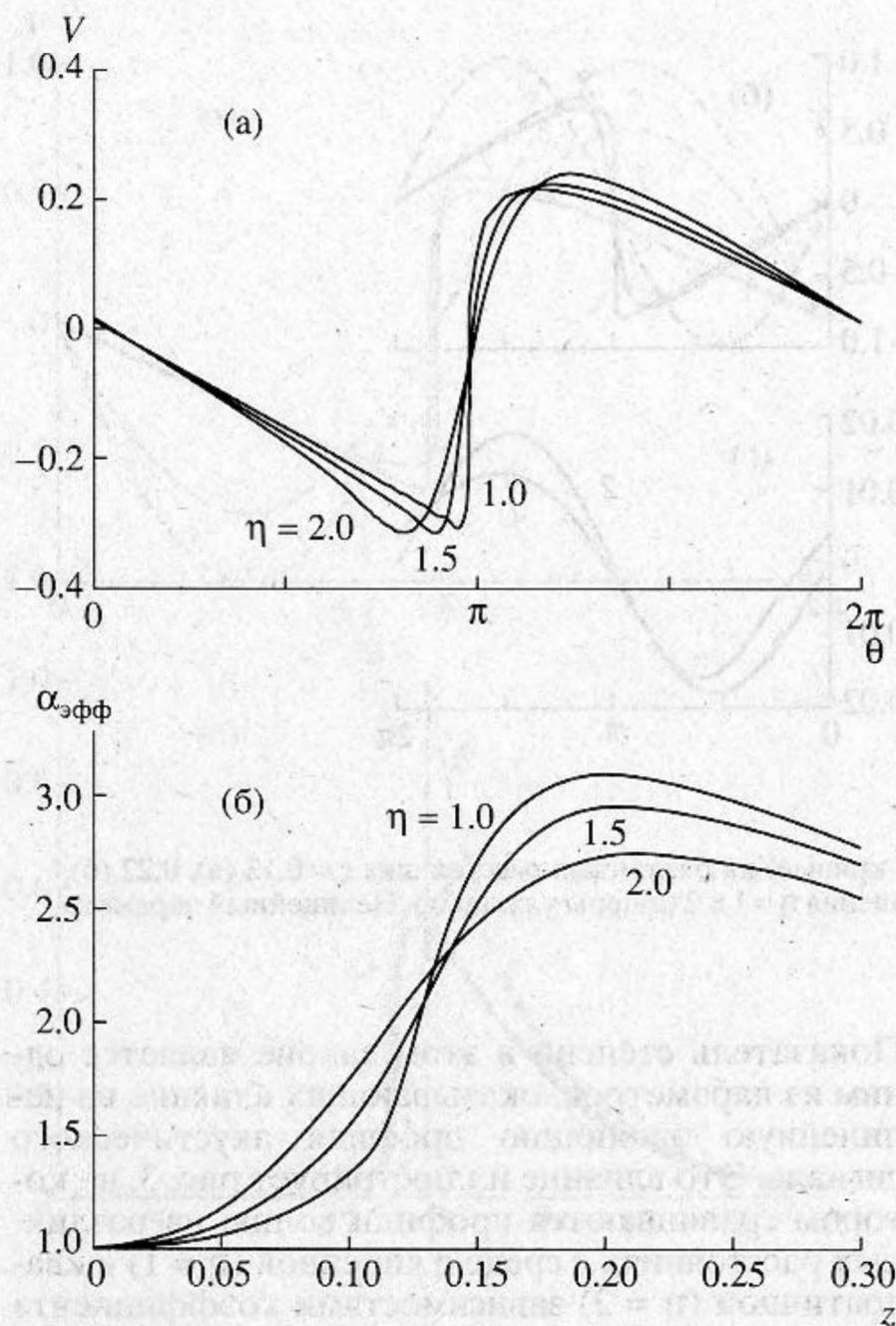
метрия профиля характерна для сред с дисперсией, например, для среды с релаксацией [1, 18, 19]. Ударный фронт в диспергирующей среде смещается за счет более быстрого распространения высоких частот, формирующих разрыв.

Аналогичное влияние оказывают эффекты дисперсии на искажение профиля ударного импульса. На рис. 2б представлены профиль исходного импульса (16) (кривая 1) и профили этого импульса на расстоянии  $z = 0.23$  (6 см), на котором отчетливо проявляется влияние как нелинейных, так и диссипативных эффектов. В случае линейного распространения (кривая 2) ударный фронт расплывается, что обусловлено поглощением высокочастотных компонент. В случае нелинейного распространения (кривая 3) фронт импульса распространяется быстрее и его ширина фронта меньше по сравнению с линейным случаем. Такое проявление нелинейных эффектов хорошо известно. Указанные кривые 2 и 3 рассчитаны с учетом дисперсии скорости звука. Для иллюстрации роли дисперсии приведен также профиль нелинейного импульса, рассчитанный при учете лишь поглощения (кривая 4). Из сравнения профилей 3 и 4 видно, что пренебрежение дисперсией приводит к появлению протяженного "предвестника", распространяющегося быстрее ударного фронта, что обусловлено несоблюдением принципа причинности. Кроме того, в модели без дисперсии несколько завышается пиковое давление сигнала и уменьшается скорость движения ударного фронта.

Биологические ткани имеют зависимость коэффициента поглощения от частоты в диапазоне от линейной до почти квадратичной зависимости.

Показатель степени в этом законе является одним из параметров, оказывающих влияние на нелинейную эволюцию профиля акустического сигнала. Это влияние иллюстрирует рис. 3, на котором сравниваются профили волны на различных расстояниях в среде с линейной ( $\eta = 1$ ) и квадратичной ( $\eta = 2$ ) зависимостями коэффициента поглощения от частоты. Исходная волна выбиралась гармонической. Как видно, в среде с линейным законом ( $\eta = 1$ ) ударный фронт образуется раньше, имеет более узкую структуру и сохраняется дольше, чем в среде с квадратичным законом ( $\eta = 2$ ). Это объясняется тем, что в среде с квадратичным законом сильнее поглощаются высокочастотные гармоники спектра.

На больших расстояниях  $x \gg x_{\text{погл}}$  (рис. 3г), где волна вновь становится гармонической, амплитуда пикового давления в среде с  $\eta = 1$  становится меньше, чем в среде с  $\eta = 2$ . Это кажется на первый взгляд необычным, поскольку все высшие гармоники в среде с квадратичным законом  $\eta = 2$  имеют больший коэффициент поглощения по сравнению со случаем линейного закона  $\eta = 1$ . Такое явление обусловлено менее интенсивной генерацией высокочастотных компонент спектра в более диссипативной среде и, соответственно, меньшим поглощением на образующихся ударных фронтах. Подобный эффект ограничения эффективности перераспределения энергии волны в высокочастотную область спектра при усилении поглощения гармоник исходного сигнала может быть использован для управления нелинейными волновыми взаимодействиями. Наиболее ярко он проявляется в среде с резонансным



**Рис. 4.** Иллюстрация влияния показателя степени  $\eta$  на эволюцию волны в нелинейной среде. На входе задана гармоническая волна частоты 1 МГц,  $\alpha_0 = 0.038 \text{ см}^{-1}$ , нелинейный параметр  $N = 15$ .

а) профиль волны на расстоянии  $z = 0.5$ .

б) зависимость эффективного коэффициента поглощения от расстояния.

поглощением на второй гармонике, в которой ограничивается переход энергии вверх по спектру и волна распространяется практически не искажаясь [20].

Для исходно гармонической волны изменение закона поглощения от линейного к квадратичному приводит к расширению ударного фронта, что показано на рис. 4а. Здесь представлены профили волны, рассчитанные на расстоянии  $z = 0.5$  при  $N = 15$  для сред с различными значениями показателя степени  $\eta$  (цифры у кривых) и соответствующей данным средам дисперсией скорости звука. Видно, что увеличение степени  $\eta$  практически не изменяет амплитудные значения волны, однако наблюдается заметное расширение ударного фронта. Его длительность увеличивается в несколько раз при изменении закона поглощения от линейного до квадратичного.

Показатель степени в законе поглощения существенно влияет также на поглощение полной энергии волны в нелинейной среде. На рис. 4б показано изменение с расстоянием эффективного коэффициента поглощения  $\alpha_{\text{эфф}}$ , нормированного на его значение в случае линейного распространения волны и рассчитанного по изменению интенсивности (14)

$$\alpha_{\text{эфф}} = -\frac{dI/dx}{2\alpha_0 I}. \quad (17)$$

Различные кривые соответствуют средам с одинаковым значением коэффициента поглощения  $\alpha_0$  на основной частоте, но различным показателем степени в законе поглощения  $\eta = 1, 1.5, 2$ . Видно, что на небольших расстояниях эффективный коэффициент поглощения больше для квадратичного закона из-за более сильных диссипативных эффектов на высоких частотах. Однако после образования крутых участков в профиле волны коэффициент поглощения больше для среды с линейным законом, как следствие более эффективного нелинейного режима поглощения. Кривые приведенные на рис. 4б, рассчитывались с учетом дисперсии. Однако те же зависимости, рассчитанные без учета дисперсии, оказались практически неотличимыми. Таким образом, несмотря на то, что дисперсия меняет профиль волны, она не оказывает заметного влияния на поглощение ее энергии.

Закон поглощения (2) характеризуется двумя параметрами,  $\alpha_0$  и  $\eta$ , которые оказывают различное влияние на нелинейную эволюцию акустического сигнала. На рис. 5а показаны профили импульса (16) на расстоянии  $x = 6 \text{ см}$  для сред с различными показателями степени в законе поглощения при фиксированном параметре  $\alpha_0$ , соответствующем поглощению в бутандиоле на частоте 1 МГц. Из рисунка видно, что увеличение показателя степени приводит к заметному уширению ударного фронта, что объясняется более интенсивным поглощением высокочастотных гармоник спектра, однако не оказывает сильного влияния на величину пикового давления. Напротив, изменение второго параметра в законе поглощения,  $\alpha_0$ , приводит к изменению амплитуды импульса. С увеличением коэффициента поглощения  $\alpha_0$  пиковое давление падает, а ширина и положение ударного фронта меняется незначительно (рис. 4б). Здесь показаны профили импульса на том же расстоянии  $x = 6 \text{ см}$  в средах с линейной зависимостью коэффициента поглощения от частоты, но различными значениями  $\alpha_0$  (цифры у кривых).

Таким образом, нелинейные взаимодействия как в периодических волнах, так и в импульсных полях зависят от параметров степенного закона поглощения, особенно для сильно нелинейных

волн с разрывами. Даже небольшая дисперсия скорости звука приводит к заметным искажениям профиля волны по сравнению со случаем квадратичного закона поглощения и отсутствия дисперсии. При этом дисперсия среды практически не влияет на диссипацию энергии нелинейной волны. Параметры степенного закона поглощения оказывают различное влияние на характер искажения профиля распространяющегося сигнала, особенно в случае ударного импульса: показатель степени оказывает большее влияние на ширину ударного фронта импульса, а значение коэффициента поглощения на величину его пикового давления. Это позволяет говорить о принципиальной возможности диагностики параметров поглощения среды по виду прошедшего через нее ударноволнового импульса.

В заключение обсудим проблему об устойчивости разрывного фронта волны, распространяющейся в среде со степенным частотным законом поглощения  $\alpha(\omega) \sim \omega^\eta$ . Как известно, ударный фронт волны в среде с квадратичным законом поглощения  $\eta = 2$  не является математическим разрывом, а имеет конечную ширину, определяемую вязкостью среды и амплитудой волны [1]. С другой стороны, в средах с постоянным поглощением ( $\eta = 0$ ) диссипативные эффекты не препятствуют существованию разрывов в профиле волны [21]. Разрывы устойчивы также в релаксирующих средах. Такие среды характеризуются постоянным значением коэффициента поглощения на высоких частотах [19]. В случае произвольного степенного закона (2) вопрос об устойчивости разрыва, насколько нам известно, до сих пор не исследовался. Покажем, что критическим является показатель степени  $\eta = 1$ , а именно, разрыв неустойчив при  $\eta \geq 1$ .

Пусть на входе в среду задана плоская волна с разрывным профилем. Без ограничения общности в рассматриваемых рассуждениях можно считать ее периодической. Диссипация энергии волны описывается выражением

$$\frac{dI}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\alpha_n I_n, \quad (18)$$

где  $I_n \sim |C_n|^2$  и  $\alpha_n = \alpha(n\omega_0) \sim n^\eta$  — соответственно интенсивность и коэффициент поглощения  $n$ -й гармоники. Спектр разрывной волны на высоких частотах всегда имеет асимптотический вид (11), т.е.  $|C_n| \sim n^{-1}$ . Поэтому убыль энергии волны с расстоянием определяется рядом, члены которого для больших  $n$  ведут себя как  $n^{\eta-2}$ . При  $\eta \geq 1$  ряд (18) является расходящимся, т.е. величина  $dI/dx$  является бесконечной. Предположив существование высокочастотной асимптотики спектра (11) в любом сколь угодно малом интервале расстояний получим бесконечную величину погло-

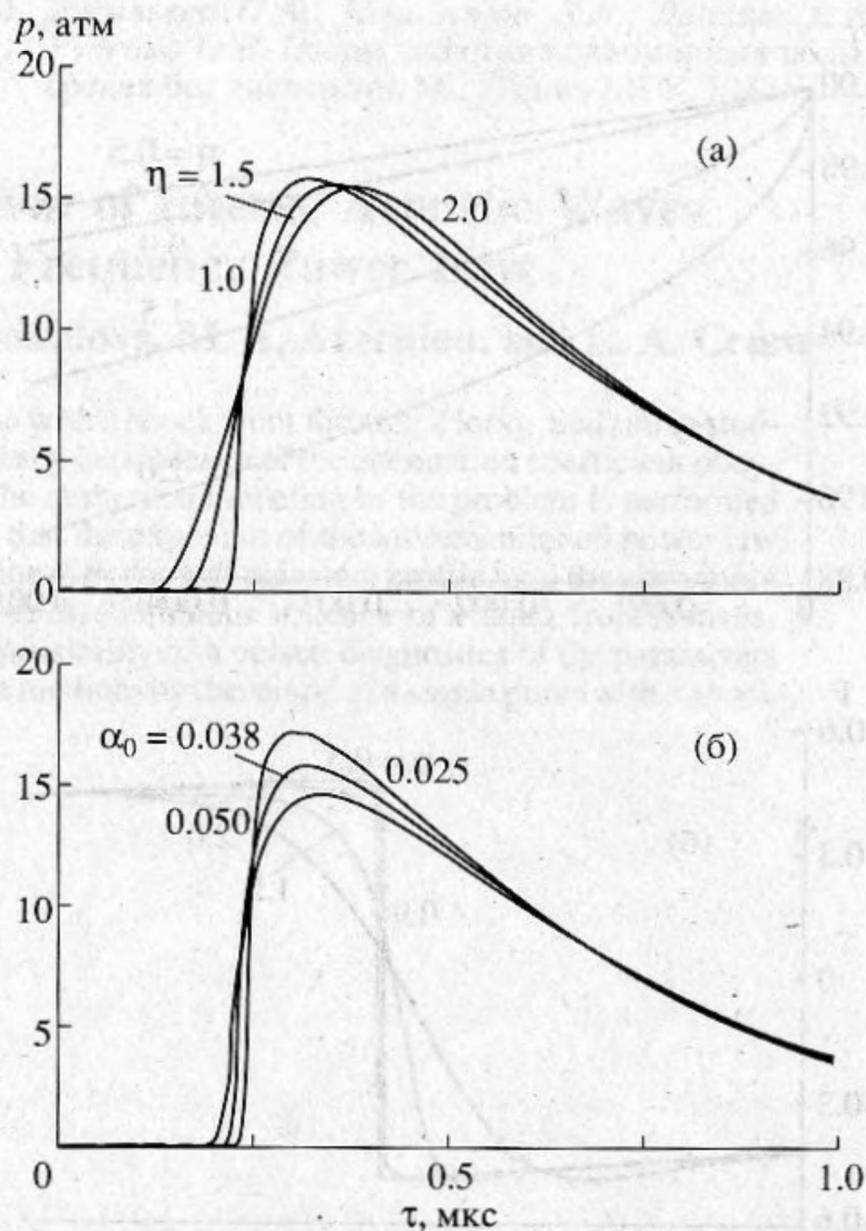
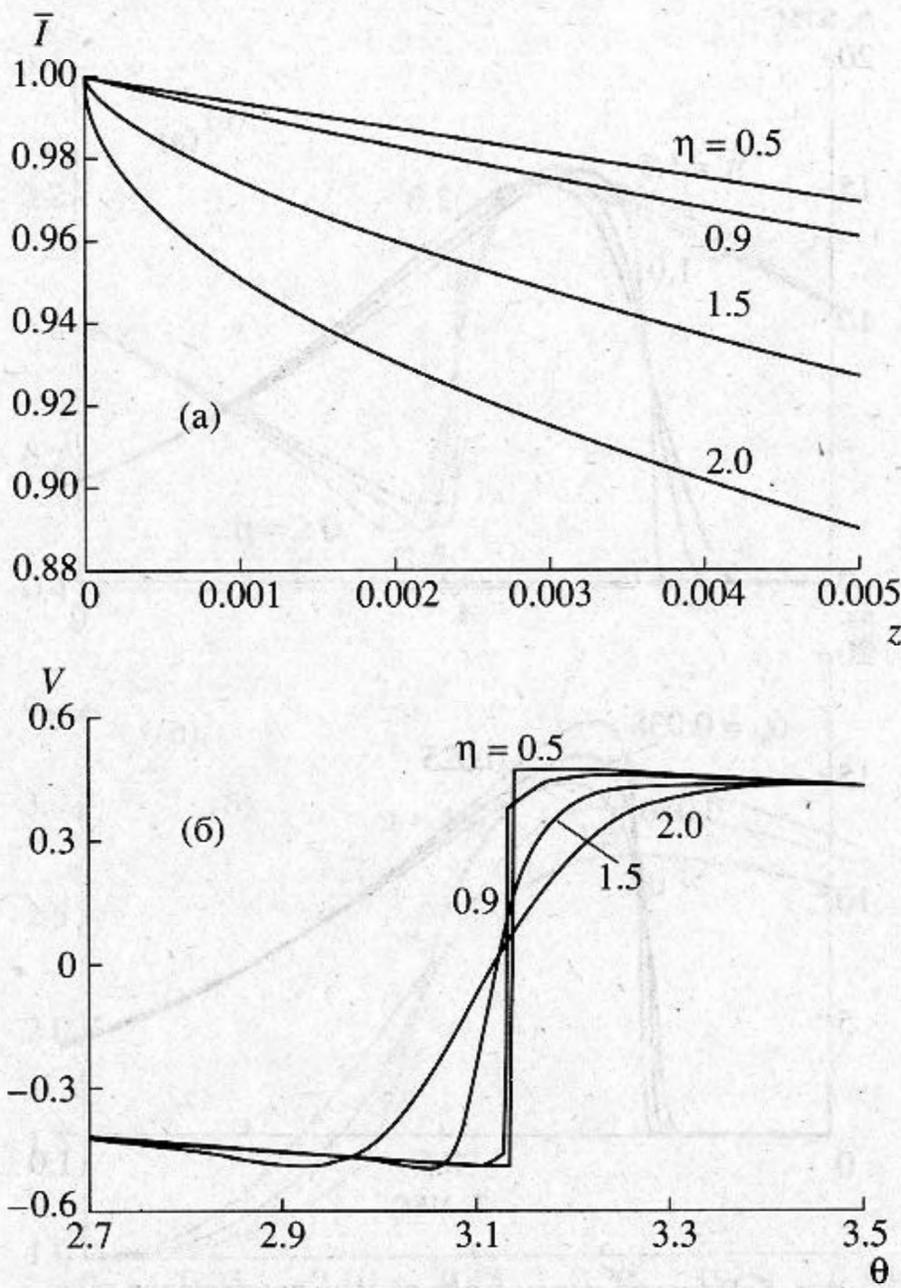


Рис. 5. Влияние параметров закона поглощения  $\alpha_0$  и  $\eta$  на искажение ударного импульса, прошедшего слой нелинейной поглощающей среды. Параметры импульса на входе  $p_0 = 30$  атм,  $t_0 = 0.3$  мкс, расстояние в среде  $x = 6$  см.

- а) Профили импульса в средах с одинаковым коэффициентом поглощения  $\alpha_0 = \alpha(1\text{МГц}) = 0.038 \text{ см}^{-1}$  и различными показателями степени  $\eta = 1, 1.5, 2$ .
- б) Профили импульса в средах с одинаковым показателем степени  $\eta = 1$ , но различными значениями  $\alpha_0 = 0.025, 0.038, 0.05 \text{ см}^{-1}$ .

щенной энергии, что невозможно в силу ограниченности интенсивности исходной волны. Таким образом, разрыв в этом случае является неустойчивым. При  $\eta < 1$ , напротив, ряд (18) сходится и существование разрыва возможно.

В качестве иллюстрации на рис. 6 приведены рассчитанные численно зависимости интенсивности исходного разрывной волны от расстояния  $z$  (а) и профиль волны в области ударного перехода в нелинейной среде ( $N = 10$ ) при  $z = 0.005$  для различных показателей степени закона поглощения  $\eta = 0.5, 0.9, 1.5, 2$ . Исходная форма волны выбрана пилообразной с амплитудой разрыва  $A_s = 1$ , интенсивность нормирована на свое начальное значение при  $z = 0$ . Видно, что при  $\eta < 1$  производная интенсивности  $dI/dz$  при  $z = 0$  конечна, а профиль



**Рис. 6.** Иллюстрация устойчивости ударного фронта исходно пилообразной волны в средах с различными показателями степени  $\eta$  в законе поглощения.

а) Зависимость нормированной интенсивности  $\bar{I} = I(z)/I(z=0)$  от расстояния  $z$ ;

б) Профиль волны в окрестности ударного перехода при  $z = 0.005$ .

волны при ее распространении остается разрывным. При  $\eta > 1$  интенсивность при  $z = 0$  убывает бесконечно быстро, а исходный разрыв сглаживается. Эффект сглаживания разрыва усиливается при увеличении показателя степени  $\eta$ .

Работа выполнена при частичной поддержке фонда DARPA, гранта NIH (DK 43881) и РФФИ (98-02-17318).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990.
3. Применение ультразвука в медицине. Физические основы. Под редакцией К. Хилла, 1989 г.

4. Horton C.W.Sr. Dispersion relationships in sediments and sea water // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 55. № 3. P. 547–549.
5. Chapelon J.Y., Cathignol D. High energy ultrasound therapy: Part 1 – High intensity focused ultrasound (HIFU) // Advances in Nonlinear Acoustics. Proc. 13th International Symposium on Nonlinear Acoustics, Bergen, Norway.
6. Chaussy C., Fuchs G.J. Current state and future developments of noninvasive treatment of human urinary stones with extracorporeal shock wave lithotripsy // J. Endourology, 1989. V. 141. P. 782–789.
7. Пищальников Ю.А., Сапожников О.А., Хохлова В.А. Модификация спектрального подхода к описанию нелинейных акустических волн с разрывами // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 3. С. 412–417.
8. Khokhlova V.A., Sapozhnikov O.A., Crum L.A., Averkiou M.A. Modified spectral solution of a Burgers-type equation for the description of a shock wave propagation in biological media // Ultrasonic World Congress. September 3–7, 1995. Berlin. Germany. P. 1099–1102.
9. Гинзбург В.Л. Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн // Акуст. журн. 1955. V. 1. № 1. P. 31–39.
10. Szabo T.L. Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law // J. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 96. № 1. P. 491–500.
11. Bacon D.R. Finite amplitude propagation in acoustic beams // 1986. Ph.D. thesis, Bath University, UK.
12. Collins M.D. The time-domain solution of the wide-angle parabolic equation including the effects of sediment dispersion // J. Acoust. Soc. Am. 1988. V. 84. P. 2114–2125.
13. Averkiou M.A., Crum L.A., Khokhlova V.A., Rudenko O.V. Nonlinear waveform distortion and energy attenuation of intense acoustic waves in biological tissue // In: Nonlinear Acoustics in Perspective (Proc. 14th International Symposium on Nonlinear Acoustics, Nanjing, China), Nanjing University Press. 1996. P. 463–468.
14. Tavakkoli J., Cathignol D., Souchon R., Sapozhnikov O.A. Modeling of pulsed finite-amplitude focused sound beams in time domain // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 104. № 4. P. 2061–2072.
15. O'Donnell M., Janes E.T., Miller J.G. Kramers–Kronig relationship between ultrasonic attenuation and phase velocity // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 69. № 3. P. 696–701.
16. Cranz B. Measurement of shock wave properties after the passage through a tissue mimicking material // Ultrasonic Symposium, 1994.
17. Coleman A.J., Saunders J.E. A survey of the acoustic output of commercial extracorporeal shockwave lithotripters // Ultrasound in Med. & Biol. 1989. V. 15. № 3. P. 213–227.
18. Андреев В.Г., Пищальников Ю.А., Сапожников О.А., Хохлова В.А., Кливлэнд Р.О. Диагностика релаксирующей среды акустическим импульсом с ударным фронтом // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 1. С. 13–19.
19. Полякова А.Л., Солуян С.И., Хохлов Р.В. К вопросу о распространении конечных возмущений в релаксирующей среде // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 1. С. 107–112.

20. Руденко О.В. К проблеме искусственных нелинейных сред с резонансным поглотителем // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 3. С. 398–402.
21. Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во МГУ, 1983.

## Nonlinear Distortion and Attenuation of Intense Acoustic Waves in Lossy Media Obeying a Frequency Power Law

S. S. Kashcheeva, O. A. Sapozhnikov, V. A. Khokhlova, M. A. Averkiou, and L. A. Crum

Nonlinear propagation of a periodic wave and a single pulse with a shock front through a lossy medium is studied theoretically. The medium is characterized by the frequency dependence of the attenuation coefficient obeying a power law and by a corresponding dispersion law. The numerical modeling of the problem is performed on the basis of the modified spectral approach. It is found that the exponent of the aforementioned power law essentially affects the efficiency of nonlinear interactions, the distortion of the wave profile, and the absorption of acoustic energy in the nonlinear mode. The stability of the discontinuous structure of a shock front is investigated for different power laws close to a linear one. The possibility of a pulsed diagnostics of the parameters of the frequency power law governing the attenuation in the medium by the shape of a single pulse with a shock front after its passage through the medium is considered.