

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЛЕЙ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ТЕРАПЕВТИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

© 2011 г. П. В. Юлдашев¹, В. А. Хохлова^{1,2}

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119991 Москва, Ленинские горы

² Центр промышленного и медицинского ультразвука, Лаборатория прикладной физики университета
шт. Вашингтон, Сизтл, шт. Вашингтон, 98105, США

E-mail: {petr,vera}@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 20.12.10 г.

Развита новая численная модель для описания трехмерных нелинейных полей, создаваемых современными ультразвуковыми терапевтическими решетками. Модель основана на решении уравнения Вестервелта; разработанный алгоритм позволяет рассчитывать нелинейные поля периодических волн при наличии ударных фронтов, локализованных вблизи фокуса. В численном эксперименте исследована роль нелинейных эффектов при фокусировке в воде для двумерной решетки, состоящей из 256 элементов, в диапазоне интенсивностей на элементах до 10 Вт/см². Полученные решения показали, что для характерных режимов эксплуатации современных решеток нелинейные эффекты играют важную роль и в профиле волны в фокусе происходит образование ударных фронтов.

Ключевые слова: многоэлементные ультразвуковые решетки, нелинейность, дифракция, фокусированные пучки.

I. ВВЕДЕНИЕ

В современных устройствах неинвазивной хирургии с использованием мощного фокусированного ультразвука (HIFU) все больше начинают применяться двумерные фазированные решетки, состоящие из многих элементов, расположенных на сегменте сферической поверхности [1–4]. Каждый элемент такой решетки управляется независимо, что позволяет электронным образом перемещать фокус в пространстве, создавать сложную конфигурацию поля в виде нескольких фокусов, минимизировать нагрев акустических препятствий (например, ребер) при сохранении эффективности воздействия в фокусе [3–7]. При помощи решеток можно улучшать качество фокусировки в неоднородной ткани с использованием методов обращения времени, а также отслеживать область воздействия, которая смещается за счет дыхания [1, 8].

При описании полей, создаваемых HIFU излучателями, разработке протоколов облучения и предсказании соответствующих биоэффектов в ткани важным инструментом исследования является численный эксперимент [9, 10]. Уровни интенсивности в фокусе HIFU-излучателей достигают нескольких десятков тысяч Вт/см², при этом за счет эффектов акустической нелинейности в профиле ультразвуковой волны образуются ударные фронты, что принципиальным образом меняет эффективность теплового воздействия ульт-

развука на ткань и может приводить к новым биологическим эффектам нетеплового характера [11, 12].

Нелинейные эффекты в фокусированных ультразвуковых полях с учетом образования разрывов подробно исследовались для аксиально-симметричных пучков [9, 10, 12, 13]. Трехмерные задачи решались для пучков, создаваемых излучателями диагностического ультразвука, т.е. при слабой фокусировке и слабом проявлении нелинейных эффектов [14, 15]. Исследовать нелинейные эффекты в трехмерных полях, создаваемых многоэлементными HIFU-решетками, при учете формирования разрывов до сих пор не удавалось. В этой задаче соединяются сразу несколько трудностей: сложная дифракционная структура ближнего поля и большие углы фокусировки, что требует использования точных дифракционных моделей и мелкой пространственной сетки численной схемы, а также сильные нелинейные эффекты, требующие учета большого количества гармоник либо мелкой временной сетки. Для моделирования в трехмерной геометрии с учетом образования ударных фронтов в общем случае требуются существенные затраты памяти и машинного времени, превышающие возможности современных SMP-компьютеров, т.е. компьютеров с общей памятью.

В данной работе впервые удалось получить численное решение для нелинейного поля тера-

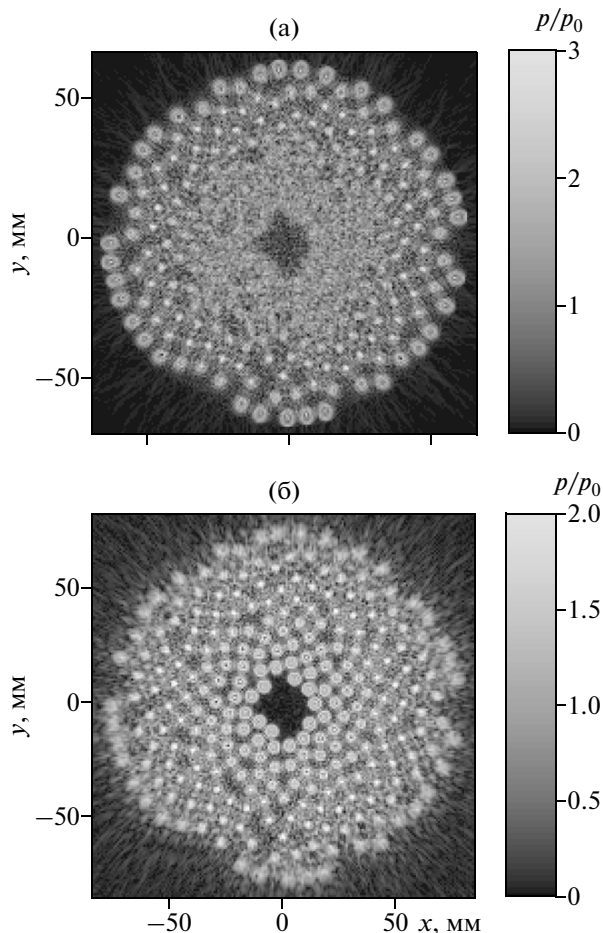


Рис. 1. Пространственные распределения безразмерной амплитуды давления p/p_0 , рассчитанные на плоскости вблизи края излучателя при $z = 20$ мм (а), и в плоскости $z = 0$ (б). Здесь $p_0 = \rho_0 c_0 u_0$, где u_0 – амплитуда колебательной скорости на поверхности элемента.

пентической решетки в режиме развитых разрывов. Был разработан экономный по объему используемой памяти алгоритм, позволяющий проводить такие расчеты на SMP-компьютерах. В качестве примера была рассмотрена решетка с частотой 1.2 МГц, состоящая из 256 элементов радиусом 3.3 мм, расположенных на сферической чашке радиусом 68 мм, с отверстием для диагностического датчика радиусом 9 мм, фокусным расстоянием 120 мм и интенсивностью акустического поля вблизи излучающего элемента до 10 Вт/см^2 [3, 16].

II. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

1. Уравнение Вестервельта

Моделирование поля решетки проводилось на основе уравнения Вестервельта [17], которое в со-

провождающей системе координат можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \Delta p + \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3}. \quad (1)$$

Здесь p – акустическое давление, z – выделенное направление вдоль оси пучка, $\tau = t - z/c_0$, t – время, $\Delta p = \partial^2 p / \partial z^2 + \partial^2 p / \partial y^2 + \partial^2 p / \partial x^2$, x и y – поперечные к z пространственные координаты; ρ_0 , c_0 , β и δ – плотность, скорость звука, коэффициент нелинейности и коэффициент поглощения в среде соответственно. Расчеты проводились в воде, соответствующие физические параметры в уравнении (1) были равны: $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 1500 \text{ м/с}$, $\beta = 3.5$, $\delta = 4.33 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Начало координат соответствовало центру сферического сегмента, на котором были расположены одиночные излучатели, так что точка $x = 0$, $y = 0$, $z = F$ соответствовала геометрическому фокусу решетки. Уравнение (1), описывающее распространение нелинейных волн в вязкой среде в положительном направлении оси z , широко использовалось ранее для моделирования слабонелинейных и слабофокусированных полей, создаваемых диагностическими датчиками [18, 19].

2. Граничные условия для численного алгоритма

Для решения уравнения Вестервельта (1), записанного в эволюционной форме по координате z , требуется задание граничных условий на некоторой начальной плоскости ($x, y, z = z_0$). Поскольку элементы решетки расположены на поверхности сферической чашки, то вначале рассчитывалось поле на плоскости $z_0 = 2$ см от центра решетки вблизи ее края, расположенного на расстоянии $z = 1.85$ см от центра, с использованием интеграла Рэлея:

$$p(\vec{r}) = -i\rho_0 c_0 \frac{k}{2\pi} \int_S \frac{u(\vec{r}') \exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS', \quad (2)$$

где $k = \omega/c_0$ – волновое число, $\omega = 2\pi f$, f – частота ультразвука, $u(\vec{r}')$ – комплексная амплитуда колебательной скорости на поверхности излучателя S .

Сложная дифракционная структура поля давления, создаваемого 256 элементами на указанной плоскости ($x, y, z = z_0$), показана на рис. 1а. Чтобы учесть влияние нелинейных эффектов в ближнем поле решетки, далее граничное условие переносилось линейным образом на плоскость ($x, y, z = 0$), касательную к центру сферической поверхности решетки, рассчитывая интеграл Рэлея описанным ниже методом углового спектра. Полученное поле “виртуальных” источников на плоскости ($x, y, z = 0$) показано на рис. 1б. Числен-

ные решения рассчитывались, используя оба граничных условия, наблюдаемые различия в результатах моделирования обсуждаются ниже.

3. Численный алгоритм

Численное решение уравнения (1) строилось последовательно, переходя от плоскости $(x, y, z = z_1)$ к плоскости $(x, y, z = z_1 + \Delta z)$ с шагом Δz , следуя методу расщепления по физическим факторам [9, 10, 13, 14, 18, 19]. Отметим здесь лишь основные особенности применения этого метода для данной задачи. Уравнение (1) разбивалось на более простые уравнения для дифракции:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \Delta p, \quad (3)$$

нелинейности:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p^2}{\partial \tau}, \quad (4)$$

и поглощения:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}. \quad (5)$$

При известном распределении давления в плоскости $(x, y, z = z_1)$, комбинируя определенным образом решения этих уравнений последовательно друг за другом, можно получить решение уравнения (1) в плоскости $(x, y, z = z_1 + \Delta z)$ со вторым порядком точности, т.е. ошибкой аппроксимации на каждом шаге $O(\Delta z^3)$, а на всем интервале расчета по координате $z - O(\Delta z^2)$ [13, 18, 19]. В данной работе метод расщепления применялся в том варианте, когда каждый шаг по координате z начинается и завершается оператором дифракции, рассчитываемым на половинном шаге сетки. Если обозначить действие оператора дифракции на шаге Δz как $\Gamma_{D, \Delta z}$, а совместное действие операторов нелинейности и поглощения как $\Gamma_{N+A, \Delta z}$, то схема применения метода расщепления выглядит следующим образом:

$$p(\tau, x, y, z + \Delta z) = \Gamma_{D, \Delta z/2} \Gamma_{N+A, \Delta z} \Gamma_{D, \Delta z/2} p(\tau, x, y, z). \quad (6)$$

По мере изменения расстояния z и увеличения амплитуды высокочастотных компонент спектра волны величина шага Δz изменялась с целью обеспечения необходимой точности решения.

Моделирование проводилось с использованием преимуществ как спектрального, так и временного представлений акустического поля. Для перехода к спектру, решение уравнения (1) представлялось в виде разложения решения в конечный ряд Фурье [10]:

$$p(\tau, x, y, z) = \sum_{n=-N_{\max}}^{N_{\max}} p_n(x, y, z) \exp(-in\omega\tau). \quad (7)$$

Дифракционный оператор (3) рассчитывался для амплитуд каждой из гармоник методом углового спектра [18–21]. Согласно этому методу, амплитуда давления $p_n(x, y, z)$ n -ой гармоники в плоскости (x, y) с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) разлагается в двумерный спектр $\hat{p}_n(k_x, k_y, z)$ по пространственным частотам (k_x, k_y) . Компоненты углового спектра на следующем шаге $\hat{p}_n(k_x, k_y, z + \Delta z)$ получаются умножением на соответствующий фазовый множитель

$$\hat{p}_n(k_x, k_y, z + \Delta z) = \hat{p}_n(k_x, k_y, z) \times \exp[i\Delta z \sqrt{k_n^2 - k_x^2 - k_y^2 - i\Delta z k_n}], \quad (8)$$

где $k_n = n\omega/c_0$ – волновое число n -ой гармоники.

Для подавления отраженных волн, появление которых связано с использованием конечной пространственной области для поля $p_n(x, y, z)$ и периодическими граничными условиями по координатам x и y , использовался метод обнуления компонент спектра на пространственных частотах вне круга радиуса k_{\max} , т.е. в области $k_x^2 + k_y^2 > k_{\max}^2$ [18]. Радиус круга для каждой из гармоник определялся соотношением $k_{\max} = k_n / \sqrt{z_{\text{проп}}^2 \Delta k^2 / \pi^2 + 1}$, где $\Delta k = \sqrt{2} 2\pi/L$ – шаг по пространственной частоте в случае квадратной области с размером L , $z_{\text{проп}}$ – пройденное расстояние, различающееся для каждой гармоники, что связано с их постепенным введением в расчет. Кроме этого, на слое вблизи границ области вводилось дополнительное искусственное квадратичное по частоте поглощение. Коэффициент поглощения ν на основной частоте увеличивался по закону $\nu = \nu_0 [(x_1 - x)/\Delta x]^2$, где x_1 – координата начала слоя, Δx – ширина слоя, ν_0 – максимальное поглощение на границе. Типичные значения параметров слоя: $\nu_0 = 1.6 \text{ мм}^{-1}$, $\Delta x = 10 \text{ мм}$. Отметим также, что методом углового спектра можно также рассчитывать дифракционные эффекты и в параболическом приближении, заменив соответствующим образом фазовый множитель:

$$\hat{p}_n(k_x, k_y, z + \Delta z) = \hat{p}_n(k_x, k_y, z) \times \exp[-i\Delta z (k_x^2 + k_y^2)/(2k_n)]. \quad (9)$$

Расчет нелинейного оператора (4) проводился с использованием двух алгоритмов. На малых расстояниях от излучателя интегрирование проводилось в частотном представлении методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Реша-

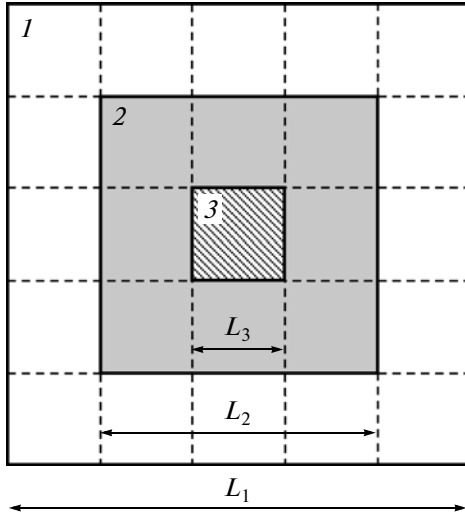


Рис. 2. Схема эшелонированного размещения массивов данных численного алгоритма для случая трех эшелонов, показанных на рисунке белым цветом (№ 1), серым цветом (№ 2), и диагональной штриховкой (№ 3). В центральном эшелоне (№ 3) учитывается максимальное количество гармоник, в граничном эшелоне (№ 1) – минимальное. Штриховые линии разделяют квадратные области, в которых на каждом шаге сетки по координате z проводятся параллельные расчеты оператора нелинейности и поглощения.

лась система уравнений для амплитуд гармоник в разложении решения в конечный ряд Фурье (7):

$$\frac{\partial p_n}{\partial z} = \frac{in\beta\omega}{\rho_0 c_0^3} \left(\sum_{k=1}^{N_{\max}-n} p_k p_{n+k}^* + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} p_k p_{n-k} \right), \quad (10)$$

где p_n^* обозначает комплексно сопряженную амплитуду гармоники. Этот алгоритм достаточно эффективен при небольшом (до нескольких десятков) количестве гармоник, поскольку количество операций для его применения пропорционально квадрату числа гармоник N_{\max} . Для уменьшения времени расчетов, гармоники включались в алгоритм постепенно, по мере расширения спектра волны с увеличением пройденного расстояния z . Когда крутизна профиля волны превышала величину, соответствующую безразмерному расстоянию 0.1, измеряемому в длинах образования разрыва в плоской волне, происходил переход к использованию консервативной схемы типа Годунова. Эта схема позволяет описывать эволюцию разрывных возмущений во временном представлении, имея всего 2–3 узла сетки на ударном фронте [22, 23]. При этом шаг по нелинейности и поглощению в формуле (6) дополнительно дробился для повышения точности расчетов [18]. Оператор поглощения рассчитывался в спектральном представлении, используя точное решение для каждой из гармоник: $p_n(x, y, z + \Delta z) =$

$= p_n(x, y, z) \exp(-\Delta z \omega_n^2 \delta / 2c_0^3)$, где $\omega_n = n\omega$ – круговая частота n -ой гармоники.

Переход между спектральным и временным представлениями решения (7) осуществлялся при помощи процедур БПФ, реализованных в библиотеке FFTW. Расчет БПФ производился небольшими блоками, т.е. сразу для некоторого небольшого числа профилей (несколько сотен), взятых для соседних точек вдоль оси x . Такой прием позволил существенно повысить эффективность расчета по сравнению с режимом, когда вычисляются одиночные БПФ для каждой пространственной точки.

4. Оптимизация расчетов и параллелизм алгоритма

Численное моделирование трехмерных нелинейных акустических полей при помощи описанных выше численных методов предъявляет высокие требования к вычислительной мощности компьютера и объему оперативной памяти. Эти требования особенно повышаются при образования в акустическом поле ударных фронтов, поскольку в этом случае необходимо высокое разрешение численной сетки как по временной, так и по пространственной координатам [10, 13]. Массивы данных становятся слишком большими, и задача не может быть решена на доступных SMP-компьютерах, объем памяти которых сейчас, как правило, не превышает 32 Гб. При расчетной области для поля решетки по поперечным координатам 25×25 см, размере шагов сетки $dx = dy = 0.05$ мм, учете 500 гармоник и одинарной точности представления вещественных чисел, объем массивов для описания поля давления составляет около 90 Гб. Такие размеры массивов не являются проблемой для кластерных систем, однако разработка параллельного алгоритма для кластера является гораздо более сложной, чем для SMP-компьютера. В данной работе алгоритм был оптимизирован таким образом, чтобы его можно было использовать для расчета на многопроцессорных машинах с общей памятью объемом несколько десятков Гб.

Возможность оптимизации заключалась в том, что нелинейные эффекты в сильно фокусированных полях систем ультразвуковой хирургии значительны только вблизи фокальной области, где необходимо учитывать в расчетах большое число гармоник, при этом используя гораздо меньшее число гармоник вне области фокуса как вдоль, так и поперек оси пучка. Аналогичный подход по ограничению числа гармоник вне области пучка, содержащей ударные фронты, применялся при моделировании нелинейных эффектов в ближнем поле аксиально-симметричного излучателя [24]. На рис. 2 схематично показан способ разме-

щения различного числа гармоник в случае трех областей, обозначенных на рисунке различными номерами. Гармоники, начиная с 1-ой по n_1 , хранятся в области № 1 размером L_1 , с $n_1 + 1$ по n_2 — в области № 2 размером L_2 и т.д. Конкретное количество гармоник подбирается индивидуально для каждого расчетного случая. Такой способ размещения данных будем называть эшелонированным, а сами области — эшелонами. Как видно из рисунка, размеры эшелонов L_i кратны размеру наименьшего эшелона L_3 , т.е. фактически вся область разбита на квадраты, очерченные на рисунке пунктирными линиями. Это сделано с целью эффективной реализации нелинейных алгоритмов внутри таких квадратов с применением потоковой обработки данных и организацией эффективной работы с памятью. Размер каждого эшелона определялся по формуле $L_k = L_1(2N - 2k + 1)/(2N - 1)$, где k — номер эшелона, N — общее число эшелонов. Используемая схема расположения данных обеспечивала, с одной стороны, необходимую дифференциацию по размещению гармоник и экономию памяти в десятки раз, а с другой стороны — эффективность вычислений.

При образовании ударных фронтов в профиле волны появляются сильные поперечные пространственные градиенты поля, которые могут приводить к осцилляциям в получаемых решениях. Для устранения осцилляций использовался метод введения искусственного поглощения, которое было локализовано вблизи фокуса [10]. Для коэффициента поглощения была выбрана следующая зависимость от координаты вдоль оси:

$$\alpha = a_1 + 0.5(A - 1) \left[\operatorname{th} \left(\frac{z - z_1}{\Delta z_1} \right) - a_2 \operatorname{th} \left(\frac{z - z_2}{\Delta z_2} \right) \right]. \quad (11)$$

Здесь параметр A определяет увеличение коэффициента поглощения вблизи фокуса по сравнению с коэффициентом поглощения в воде. Коэффициенты $a_1 = (1 + B)/2$ и $a_2 = 1 + (1 - B)(A - 1)$ выражаются через параметр B , который служит для того, чтобы задавать увеличение коэффициента поглощения после фокуса. Геометрические параметры z_1 и z_2 служат для задания размеров области увеличенного поглощения, а Δz_1 и Δz_2 — для задания ширины областей перехода к установленным уровням коэффициента поглощения A и B . Подбором параметров в формуле (11) в каждом отдельном случае удалось полностью устранить осцилляции в получаемых решениях.

Подбирая конфигурацию эшелонов и параметры искусственного поглощения, удалось достигнуть минимальных поперечных шагов $dx = dy = 0.025$ мм при максимальном количестве гармоник в центральной области $N_{\max} = 500$. Численный алгоритм был реализован на языке FOR-

TRAN 95 в расчете на параллельные вычисления. В дифракционном алгоритме для двумерных БПФ использовался внутренний параллелизм библиотеки FFTW. Остальные алгоритмы были распараллелены при помощи технологии OpenMP. Расчеты проводились в рамках одного узла суперкомпьютера СКИФ МГУ “Чебышев”, содержащего 8 процессорных ядер (2 четырехядерных процессора) и 8, 16 или 32 Гб оперативной памяти. При этом было достигнуто общее ускорение в 6 раз по сравнению с последовательным выполнением кода.

5. Параметры численного алгоритма

В работе представлены результаты расчетов нелинейного поля давления, создаваемого многоэлементной решеткой при клинически характерных интенсивностях на излучающих элементах $I_0 = 1, 2, 2.5, 5$ и 10 Вт/см², а также в линейном режиме. Моделирование в линейном случае и для $I_0 = 1$ Вт/см² проводилось на сетке по пространственным поперечным координатам с шагами $dx = dy = 0.05$ мм и числом точек $N_x = N_y = 5000$. Для остальных случаев использовалась сетка с шагами $dx = dy = 0.025$ мм и числом точек $N_x = N_y = 10000$. Число эшелонов было выбрано равным 13, а максимальное число гармоник распределялось по ним следующим образом: с 1-го по 6-ой $N_{\max} = 14$, с 7-го по 9-й $N_{\max} = 40$, с 10-го по 13-й $N_{\max} = 100, 200, 300$ и 500 соответственно. При этом размер массивов данных был близок к 32 Гб. Указанное распределение гармоник по эшелонам привело к экономии памяти в 16 раз.

Расчет поля решетки проводился от начальной плоскости $z_0 = 0$ мм либо от плоскости $z_0 = 20$ мм до расстояния $z = 1.3F = 156$ мм. Шаг Δz вдоль оси решетки был равен 0.1875 мм в сегменте от начальной плоскости до $z = 0.8F$, 0.125 мм — в сегменте $[0.8F \ 0.9F]$, 0.0625 мм — в $[0.9F \ 1.1F]$ и 0.125 мм — в $[1.1F \ 1.3F]$. Количество дроблений шага для операторов нелинейности и поглощения увеличивалось от 1 в первом сегменте до 6 в области вокруг фокуса $[0.9F \ 1.1F]$.

Величина параметра искусственного поглощения A в формуле (11) была равна 2.5, 5, 20 и 40 для интенсивностей 2, 2.5, 5 и 10 Вт/см² соответственно, что обеспечивало около 7 точек на разрыв. Значения геометрических параметров в формуле (11) находились вблизи $0.96F$ и $1.03F$ для z_1 и z_2 , и $0.01F$ для Δz_1 и Δz_2 . Время расчетов для указанных выше параметров сетки при слабом проявлении нелинейных эффектов составляло несколько часов, в режиме развитых разрывов — до полутора суток.

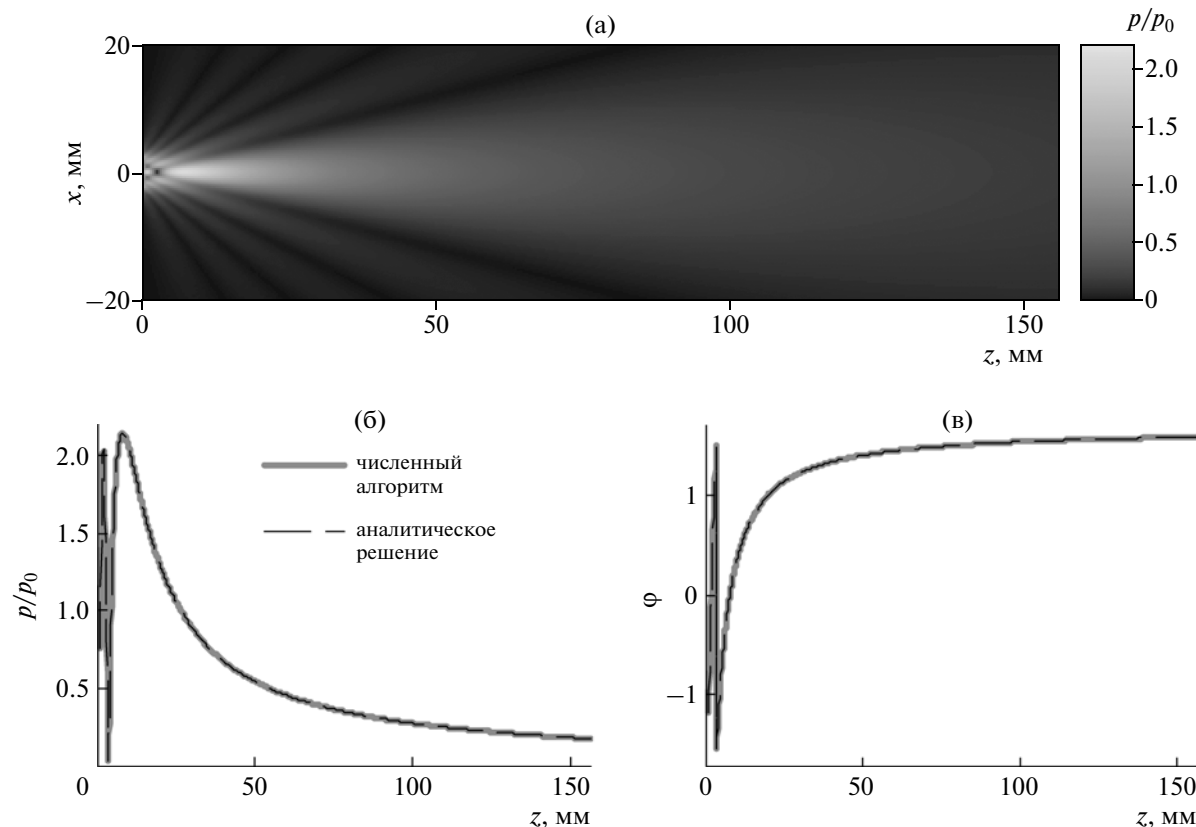


Рис. 3. Распределение амплитуды давления p/p_0 для единичного элемента решетки, рассчитанное численно в линейном приближении в плоскости оси элемента (а). Результаты линейных численных расчетов (сплошные серые кривые) для амплитуды (б) и фазы (в) давления вдоль оси элемента в сравнении с аналитическим решением (тонкие штриховые кривые).

III. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

1. Проверка численного алгоритма

Точность получаемых численных решений с использованием нового алгоритма проверялась путем сравнения результатов расчетов с известными аналитическими решениями либо с численными расчетами, выполненными другими методами. Для каждого из операторов (3)–(5), описывающих тот или иной физический эффект, результаты сравнивались с существующими аналитическими решениями. Комплексная проверка алгоритма, ввиду отсутствия общего аналитического решения, проводилась путем сравнения с известными результатами моделирования нелинейных полей аксиально-симметричных излучателей в параболическом приближении, выполненных в других работах [25, 26].

Дифракционный алгоритм тестировался путем расчета линейного поля сфокусированного одиночного поршневого излучателя элемента решетки (рис. 3а) и сравнения его с известными аналитическими решениями. На рис. 3б, 3в представлены результаты численного расчета (сплошные кривые) и аналитические решения (штрихо-

вые кривые) для (б) амплитуды и (в) фазы давления на оси элемента. Как видно из рисунка, кривые практически не отличаются друг от друга, максимальное отклонение между ними по модулю не превышает 0.5%.

Алгоритм (10) расчета нелинейного оператора (4) тестировался сравнением зависимости амплитуды гармоник от пройденного расстояния с аналитическим решением Бесселя–Фубини, описывающего процесс нелинейного распространения плоской, изначально синусоидальной, волны до образования разрыва [27]. Отличия от аналитического решения были получены на уровне 10^{-6} . Для схемы типа Годунова во временном представлении в режиме развитых разрывов использовалось сравнение с аналитическим решением для пилообразных волн [27]. При использовании 500 гармоник амплитуда разрыва в численном решении отличалась от точного решения меньше, чем на 0.3%.

Комплексная проверка работы алгоритма проводилась путем сравнения численных решений для аксиально-симметричного одиночного излучателя, получаемых с использованием нового алгоритма при учете дифракции в параболическом

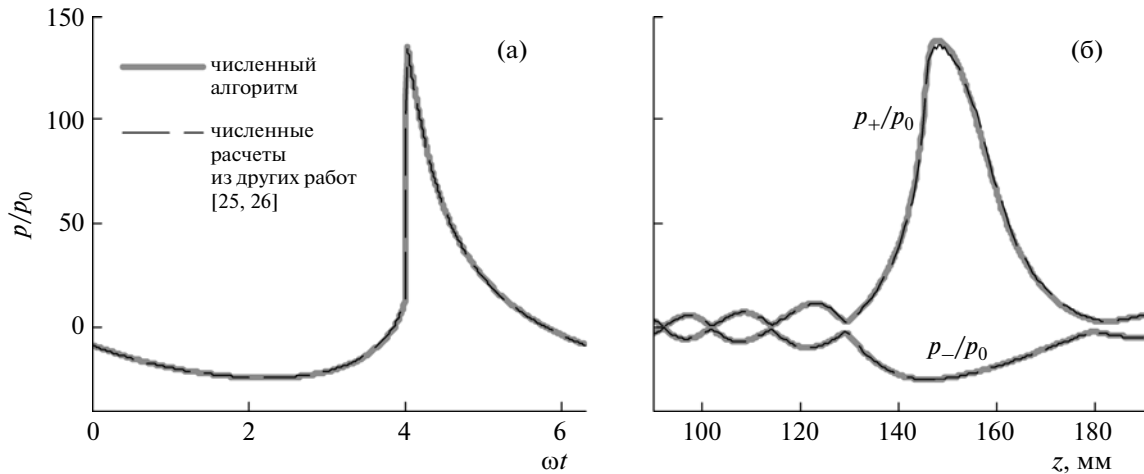


Рис. 4. Сравнение результатов нелинейного моделирования поля аксиально-симметричного излучателя, полученных в параболическом приближении с использованием нового алгоритма (сплошные серые кривые), и расчетов, выполненных с использованием других алгоритмов (тонкие штриховые кривые): профили давления в геометрическом фокусе (а); положительное p_+/p_0 и отрицательное p_-/p_0 пиковые давления вдоль оси пучка (б). Параметр нелинейности $N = 0.25$, линейный коэффициент фокусировки $G = 40$ [25, 26].

приближении (9) и аналогичных расчетов, выполненных с использованием других численных схем на основе уравнения ХЗК [9, 10, 25, 26]. Соответствующее граничное условие в трехмерном алгоритме задавалось при $z = 0$ в виде круглого поршня с фазой $k_0\sqrt{x^2 + y^2}/2F$. Для сравнения был выбран излучатель с рабочей частотой 1.7 МГц, радиусом 41.1 мм, фокусным расстоянием 150 мм, близкий по параметрам к реальному излучателю, который исследовался в работе [25]. Коэффициент линейной фокусировки излучателя в параболическом приближении был равен $G = \omega R^2/2c_0F = 40$, а интенсивность излучения была подобрана так, чтобы коэффициент нелинейности $N = F\beta p_0\omega/c_0^3\rho_0 = 0.25$ соответствовал случаю, рассмотренному в работе [26]. При этом амплитуда давления вблизи излучателя составляла 0.15 МПа, а линейная оценка интенсивности в фокусе – 1200 Вт/см². На рис. 4 приведено сравнение профилей волны в фокусе (а) и распределений пиковых давлений вдоль оси пучка (б), полученных при использовании нового численного алгоритма (сплошные кривые) и в цитированной выше работе [26] (штриховые кривые). Из рисунков видно хорошее согласие получаемых результатов, различие в которых составляет меньше 1%.

При расчете нелинейного уравнения (1) с граничными условиями, задаваемыми на плоскости $z = 2$ см, не учитываются нелинейные эффекты при распространении волны от излучателя к заданной плоскости [13]. Чтобы учесть нелинейные эффекты на данном этапе расчета, был использован метод, предложенный в работе [28] для описания полей диагностических излучателей. Как

упоминалось выше, рассчитанное с помощью интеграла Рэля поле вблизи краев излучателя (на плоскости $z = 2$ см) переносилось назад на плоскость $(x, y, z = 0)$, используя в формуле (8) величину $-\Delta z$ вместо Δz . Очевидно, что в линейном приближении расчеты поля решетки с таким граничным условием дают те же результаты, что с граничным условием, задаваемым на плоскости $(x, y, z = z_0)$. Далее в нелинейных расчетах в качестве граничного условия использовалось поле на плоскости $z = 0$ (рис. 2б), при этом нелинейный оператор (4) включался только в объеме, ограниченном поверхностью чашки. Условия на выбор объема могут быть записаны как $z \geq F - \sqrt{F^2 - x^2 - y^2}$, при $x^2 + y^2 \leq R^2$, и $z = F - \sqrt{F^2 - R^2}$ при $x^2 + y^2 \geq R^2$. Результаты расчетов с использованием такого алгоритма показали, что при интенсивностях 1, 2, 2.5, 5 и 10 Вт/см² пиковое положительное давление в геометрическом фокусе увеличивается на 2, 5, 7, 1 и 0.1% соответственно, по сравнению со случаем, когда нелинейные эффекты внутри сферического сегмента решетки не учитывались. Из этих результатов видно, что отличия в решениях, получаемых при задании граничных условий на данных плоскостях, в основном проявляются при умеренных интенсивностях в 2 и 2.5 Вт/см², когда, как будет показано ниже, ударный фронт в фокусе только начинает формироваться. Далее будут представлены результаты, полученные с учетом нелинейного распространения внутри поверхности решетки.

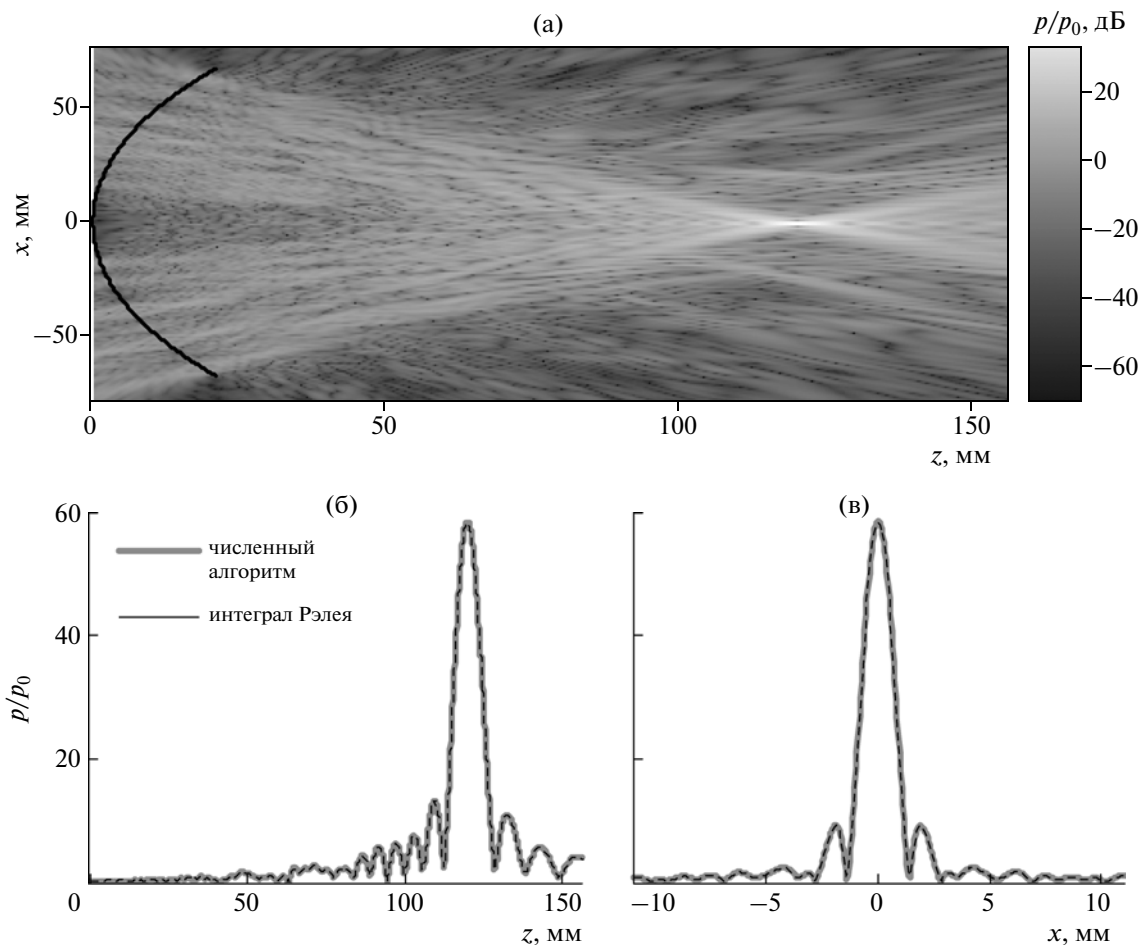


Рис. 5. Распределение амплитуды давления p/p_0 в плоскости (x, z) на оси решетки, рассчитанное численно в линейном приближении с использованием нового алгоритма (а). Черной линией показано положение сферической чашки, на которой расположены элементы (масштаб оси x сжат в три раза по отношению к масштабу оси z). Сравнение результатов расчетов с использованием нового алгоритма (сплошные серые кривые) и интеграла Рэлея (пунктирные кривые) для линейного поля решетки: амплитуда давления p/p_0 на оси (б) и в разрезе фокальной плоскости вдоль оси x (в).

2. Поле решетки в линейном приближении

Результаты расчетов поля решетки в линейном приближении представлены на рис. 5а–5в. На рис. 5а показано распределение амплитуды давления в плоскости оси решетки (x, z) . Шкала амплитуды указана в дБ относительно начальной амплитуды давления p_0 . В разрезе видна сложная дифракционная картина поля, обусловленная многоэлементной структурой решетки и случайным расположением элементов. В то же время, поле вблизи фокуса является в большой степени регулярным за счет сложения в фазе полей от отдельных элементов. На рис. 5б показана амплитуда давления вдоль оси z решетки в линейном масштабе (сплошная кривая). Для сравнения приведены также результаты расчета поля непосредственно с помощью интеграла Рэлея (пунктирная линия). Как видно, обе кривые практически совпадают,

разность между ними не превышает 0.5%. Коэффициент линейного усиления по давлению в геометрическом фокусе решетки составляет $G = p_F/p_0 = 58.46$. Это значение хорошо согласуется с величиной, получаемой путем суммирования давлений в фокусе от всех излучателей, $p_F/p_0 = 256\hat{p}_F/p_0 = 58.37$, где $\hat{p}_F/p_0 = 0.228$ – нормированное давление в фокусе от одного излучателя (рис. 3). Эта простая оценка является косвенной проверкой правильности работы алгоритма для расчета дифракции. На рис. 5в представлены распределения давления в разрезе фокальной плоскости вдоль оси x , рассчитанные также двумя способами. Видно, что кривые практически не отличаются друг от друга. Результаты линейного моделирования позволяют определить размеры фокальной области пучка: размер вдоль оси z по уровню -6 дБ составляет 9.7 мм, а размер в поперечном направлении – 1.7 мм. Амплитуда

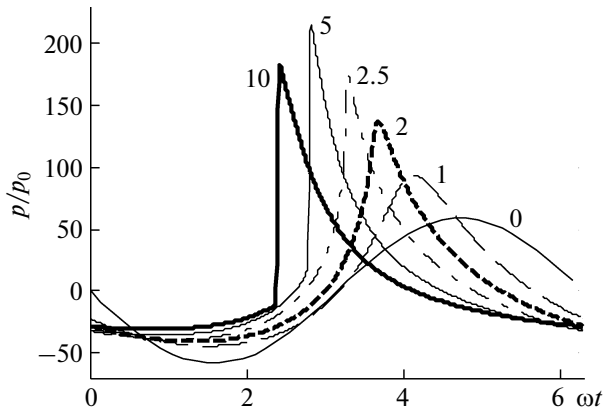


Рис. 6. Безразмерные профили давления в геометрическом фокусе решетки ($x = 0, y = 0, z = F$), рассчитанные при различных начальных уровнях интенсивности на элементах решетки 1, 2, 2.5, 5 и 10 Вт/см² (числа у кривых); 0 – линейный режим фокусировки.

поля в боковых лепестках не превышает 16% от амплитуды в фокусе.

3. Поле решетки в нелинейных режимах

На рис. 6 представлены профили давления в центре кривизны решетки, рассчитанные при разных начальных интенсивностях на ее элементах, указанных числами возле кривых: 1, 2, 2.5, 5 и 10 Вт/см²; индекс 0 соответствует случаю линейной фокусировки. Данная последовательность иллюстрирует характерное искажение профилей волны в фокусе по мере усиления нелинейных эффектов [10]. Сначала, при слабом проявлении нелинейности (1 Вт/см²), происходит незначительное искажение профиля без образования

ударного фронта. Коэффициент фокусировки для пикового положительного давления увеличивается по сравнению с линейным режимом за счет дифракционной расфазировки высших гармоник, для пикового отрицательного давления – уменьшается [10]. Изменение коэффициента фокусировки для пикового давления в фокусе за счет нелинейных эффектов можно описать поправочным индексом, равным отношению безразмерных величин пикового давления в фокусе нелинейного пучка и при линейной фокусировке [10]. При начальной интенсивности 1 Вт/см² поправочный индекс для пикового положительного давления был равен 1.6, а отрицательного – 0.76. При увеличении начальной интенсивности (2.5 Вт/см²) в фокусе начинает формироваться ударный фронт, коэффициент фокусировки для пикового положительного давления еще более нарастает (поправочный индекс равен 3). При интенсивности 5 Вт/см² развитый ударный фронт образуется вблизи фокуса, а поправочный индекс для пикового положительного давления достигает своего максимального значения 3.7 [10]. При еще большей начальной интенсивности (10 Вт/см²) ударный фронт образуется до фокуса, и, так как на ударном фронте происходит сильное нелинейное поглощение энергии волны, поправочный индекс для пикового положительного давления уменьшается до значения 3.1.

Указанные выше характерные нелинейно-дифракционные эффекты проиллюстрированы также на графиках зависимости положительного p_+ и отрицательного p_- пиковых давлений вдоль оси z (рис. 7 а) и в разрезе фокальной плоскости вдоль оси x (рис. 7 б). Кроме указанного эффекта нелинейного усиления p_+ и монотонного уменьшения

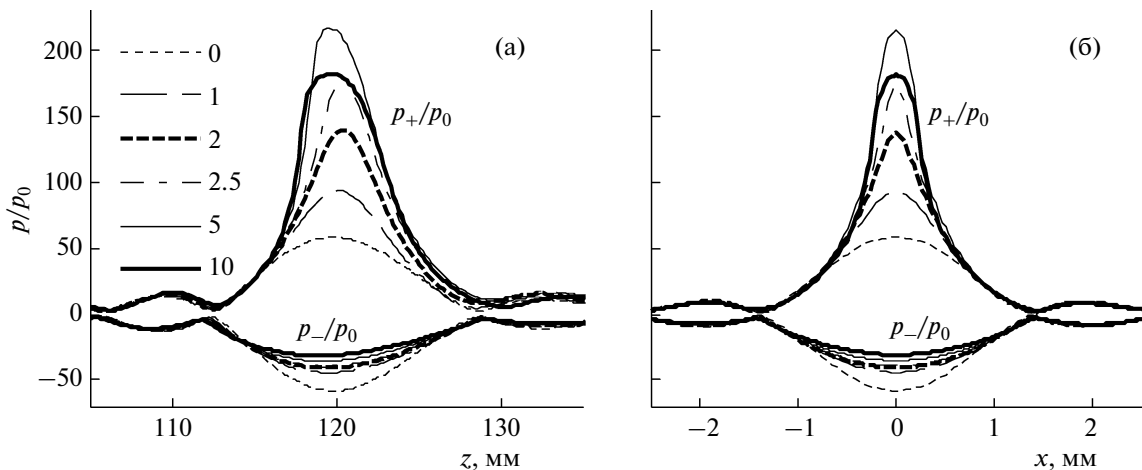


Рис. 7. Зависимости безразмерного положительного p_+/p_0 и отрицательного p_-/p_0 пиковых давлений вдоль оси решетки (а) и в разрезе фокальной плоскости вдоль оси x (б) при различных начальных уровнях интенсивности на элементах решетки: 0 – линейный режим (пунктирная линия), остальные числа у кривых соответствуют интенсивности на элементах решетки, измеряемой в Вт/см².

p_- в области фокуса, наблюдается эффект смещения точки максимума p_+ в сторону от излучателя при средней нелинейности (2 и 2.5 Вт/см²), и в сторону к излучателю при сильной нелинейности (5 и 10 Вт/см²) [10]. В рассчитанных случаях смещение составляет примерно 0.5 мм в обоих направлениях. По мере увеличения начальной интенсивности до значения, когда коэффициент усиления для положительного пикового давления начинает уменьшаться (5 Вт/см²) происходит сужение фокальной области как в продольном, так и в поперечном направлениях. После прохождения максимума коэффициента усиления фокальная область начинает уширяться. Так, ширина фокальной области по уровню -6 дБ для интенсивностей 1, 2, 2.5, 5 и 10 Вт/см² в продольном направлении составляет 7.5, 6.0, 5.3, 5.3 и 6.2 мм соответственно, а в поперечном — 1.2, 0.8, 0.7, 0.6 и 0.7 мм.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен новый численный алгоритм, позволяющий на основе уравнения Вестервелта рассчитывать трехмерные поля сфокусированных излучателей сложной геометрии при наличии ударных фронтов в области фокуса. Для уменьшения размеров массивов данных при вычислениях использовалось изменяющееся количество гармоник и эшелонированная схема хранения данных. Также использовалась параллельная модель вычислений для компьютеров с общей памятью (SMP), что позволило существенно уменьшить время расчетов. Проведено тестирование различных операторов алгоритма, а также получаемого полного решения задачи, путем сравнения результатов расчетов с известными аналитическими решениями либо с результатами расчетов, полученных в других работах для нелинейных аксиально-симметричных пучков в параболическом приближении. Результаты тестирования показали хорошую точность алгоритма. Продемонстрировано применение представленного алгоритма для расчета нелинейного поля многоэлементной двумерной фазированной решетки. Показано, что при уровнях интенсивности на элементах решетки, соответствующих клиническим применениям, в фокусе излучателя образуются разрывы.

Разработанный алгоритм может быть использован для решения широкого класса практически важных задач нелинейной медицинской акустики. С его помощью можно описывать нелинейные эффекты при калибровке полей, создаваемых источниками ультразвуковой хирургии в воде, а также рассчитывать тепловые эффекты при воздействии ультразвука на ткань. Обобщение алгоритма с учетом плавных неоднородностей

среды распространения позволит более реалистично рассчитывать поле в мягких тканях; возможно также моделирование воздействия на ткани при наличии акустических препятствий, например, при облучении сквозь грудную клетку. Важной особенностью алгоритма в данных приложениях является возможность расчета трехмерных полей мощных излучателей сложной конфигурации, оставаясь при этом в рамках разумных требований к вычислительным средствам текущего поколения.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 09-02-01530 и НИН ЕВ7643. Расчеты выполнялись на суперкомпьютере СКИФ МГУ "Чебышев". Авторы выражают благодарность М.В. Аверьянову, О.В. Бессоновой и С.М. Бобковой за помощь при тестировании алгоритма, Ш. Сокка и А. Партанен за обсуждение параметров решетки и Л.Р. Гаврилову за полезные замечания по работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pernot M., Aubry J.-F., Tanter M., Thomas J.-L., Fink M. High power transcranial beam steering for ultrasonic brain therapy // *Phys. Med. Biol.* 2003. V. 48 (16). P. 2577–2589.
2. Hynynen K., McDannold N., Clement G., Jolesz F.A., Zadicario E., Killiany R., Moore T., Rosen D. Pre-clinical testing of a phased array ultrasound system for MRI-guided noninvasive surgery of the brain—A primate study // *European Journal of Radiology*. 2006. V. 59 (2). P. 149–156.
3. Quesson B., Merle M., Köhler M.O., Mougnot C., Roujol S., De Senneville B.D., Moonen C.T. A method for MRI guidance of intercostal high intensity focused ultrasound ablation in the liver // *Med. Phys.* 2010. V. 37 (6). P. 2533–2540.
4. Hand J.W., Shaw A., Sathoo N., Rajagopal S., Dickinson R.J., Gavrilov L.R. A random phased array device for delivery of high intensity focused ultrasound // *Physics in Medicine and Biology*. 2009. V. 54 (19). P. 5675–5693.
5. Gavrilov L.R., Hand J. W. A theoretical assessment of the relative performance of spherical phased arrays for ultrasound surgery and therapy // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.* 2000. V. 41 (1). P. 125–139.
6. Гаврилов Л.Р. Двумерные фазированные решетки для применения в хирургии: многофокусная генерация и сканирование // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49. № 5. С. 604–612.
7. Bobkova S., Gavrilov L., Khokhlova V., Shaw A. and Hand J. Focusing of high intensity ultrasound through the rib cage using a therapeutic random phased array // *Ultrasound. Med. Biol.* 2010. V. 36 (6). P. 888–906.
8. Pernot M., Tanter M., Fink M. 3-D real-time motion correction in high-intensity focused ultrasound therapy // *Ultrasound. Med. Biol.* 2004. V. 30 (9). P. 1239–1249.
9. Canney M.S., Bailey M.R., Crum L.A., Khokhlova V.A., Sapozhnikov O.A. Acoustic characterization of high in-

- tensity focused ultrasound fields: A combined measurement and modeling approach // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 124 (4). P. 2406–2420.
10. Бессонова О.В., Хохлова В.А., Бэйли М.Р., Кэнни М.С., Крам Л.А. Фокусировка мощных ультразвуковых пучков и предельные значения параметров разрывных волн // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 4. С. 445–456.
 11. Буров В.А., Дмитриева Н.П., Руденко О.В. Нелинейный ультразвук: разрушение микроскопических биокомплексов и нетепловое воздействие на злокачественную опухоль // *Доклады Академии Наук. Биохимия, биофизика, молекулярная биология.* 2002. Т. 383. № 3. С. 401–404.
 12. Canney M., Khokhlova V., Bessonova O., Bailey M., Crum L. Shock-induced heating and millisecond boiling in gels and tissue due to high intensity focused ultrasound // *Ultrasound in Medicine & Biology.* 2010. V. 36. № 2. P. 250–267.
 13. Tavakkoli J., Cathignol D., Souchon R., Sapozhnikov O.A. Modeling of pulsed finite-amplitude focused sound beams in time domain // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 104. P. 2061–2072.
 14. Хохлова В.А., Пономарев А.Е., Аверкью М.А., Крам Л.А. Нелинейные импульсные поля прямоугольных фокусированных источников диагностического ультразвука // *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 4. С. 560–570.
 15. Jing Y., Cleveland R. Modeling the propagation of nonlinear three-dimensional acoustic beams in inhomogeneous media // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 122. № 3. P. 1352–1364.
 16. Kreider W., Sapozhnikov O., Khokhlova V., Farr N., Bailey M., Kaczkowski P., Partanen A., Brazzle D. // Acoustic measurements and holographic reconstruction of the Philips MR-guided HIFU source. In: Program and Abstract Book “Current and Future Applications of MR-guided Focused Ultrasound 2010”, 2nd International Symposium, 17–20 October 2010, Washington DC, USA. P. 79.
 17. Westervelt P.J. Parametric acoustic array // *J. Acoust. Soc. Am.* 1963. V. 35. № 4. P. 535–537.
 18. Zemp R.J., Tavakkoli J., Cobbold R.S. Modeling of nonlinear ultrasound propagation in tissue from array transducers // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113. № 1. P. 139–152.
 19. Varslot T., Taraldsen G. Computer simulation of forward wave propagation in soft tissue // *IEEE T. Ultrason. Ferr.* 2005. V. 52. № 9. P. 1473–1482.
 20. Юлдашев П.В., Крутянский Л.М., Хохлова В.А., Брысев А.П., Бункин Ф.В., Искажение поля сфокусированного ультразвукового пучка конечной амплитуды за случайным фазовым слоем // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 4. С. 463–471.
 21. Christopher P.T., Parker K.J. New approaches to the linear propagation of acoustic fields // *J. Acoust. Soc. Am.* 1991. V. 90. № 1. P. 507–521.
 22. Kurganov A.R., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations // *J. Comp. Phys.* 2000. V. 160. P. 241–282.
 23. Аверьянов М.В. Экспериментальная и численная модель распространения нелинейных акустических импульсов в турбулентной атмосфере, диссертация к. ф.-м. н., Москва, 2008.
 24. Khokhlova V.A., Souchon R., Tavakkoli J., Sapozhnikov O.A., Cathignol D., Numerical modeling of finite-amplitude sound beams: Shock formation in the near field of a cw plane piston source // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. V. 110. № 1. P. 95–108.
 25. Филоненко Е.А., Хохлова В.А. Эффекты акустической нелинейности при терапевтическом воздействии мощного фокусированного ультразвука на биологическую ткань // *Акуст. журн.* 2001. Т. 47. № 4. С. 541–549.
 26. Бессонова О.В., Хохлова В.А., Кэнни М.С., Бэйли М.Р., Крам Л.А. Метод определения параметров акустического поля в биологической ткани для терапевтических применений мощного фокусированного ультразвука // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 3. С. 380–390.
 27. Руденко О.В., Соляун С.И., Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
 28. Christopher T. Algorithm for the nonlinear propagation of acoustic beams from phased arrays and nonplanar sources // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2006. V. 53. № 11. P. 2188–2192.