

УДК 534.2

ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОЛЕЙ СИЛЬНО ФОКУСИРУЮЩИХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ХОХЛОВА–ЗАБОЛОТСКОЙ

© 2016 г. П. Б. Росницкий*, П. В. Юлдашев*, Б. А. Высоканов**, В. А. Хохлова*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
физический факультет
119991 ГСП-1, Москва, Ленинские горы
E-mail: pavrosni@yandex.ru

**Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
механико-математический факультет
119991 ГСП-1, Москва, Ленинские горы
E-mail: vysbor@gmail.com

Поступила в редакцию 19.08.2015 г.

Предложена модель эквивалентного излучателя для постановки граничного условия к параболическому уравнению теории дифракции при моделировании полей ультразвуковых фокусирующих преобразователей сферической формы, используемых в медицине. Граничное условие задается на плоскости, при этом амплитуда давления, радиус и фокусное расстояние излучателя выбираются таким образом, чтобы решение параболической модели на оси пучка в фокальной области наилучшим образом соответствовало решению полной дифракционной модели (интеграл Рэлея) для сферического излучателя. Получены аналитические формулы для расчета параметров эквивалентного излучателя. Показано, что предложенный подход переноса граничных условий со сферической поверхности на плоскость позволяет достичь хорошего соответствия между решениями в пределах нескольких дифракционных максимумов вокруг фокуса даже для сильно фокусирующих излучателей с диафрагменным числом меньшим единицы. Развитый метод может быть использован для расчета нелинейных полей фокусирующих излучателей с использованием уравнения Хохлова–Заболотской.

Ключевые слова: фокусировка, дифракция, параболическое приближение, граничные условия, нелинейные волны, медицинская акустика, ультразвуковая хирургия.

DOI: 10.7868/S032079191602012X

ВВЕДЕНИЕ

В современных медицинских приложениях широко используются мощные ультразвуковые фокусирующие излучатели для проведения неинвазивных, т.е. без прямого хирургического вмешательства, операций [1, 2]. Основным механизмом разрушения патологически измененных участков ткани является тепловое воздействие ультразвука, однако в последние несколько лет все большее развитие приобретают методы механического разрушения тканей с использованием нелинейных высокоамплитудных волн с ударными фронтами [3, 4]. Для характеристики полей, создаваемых излучателями ультразвуковой хирургии [5–7], планирования облучения [8] и разработки излучателей для конкретных приложений [9] широко используются методы численного моделирования. Одновременно простой и достаточно общей моделью излучателя является одиночный фокусирующий элемент в виде сферического сегмента с равномерным распределением амплитуды колеба-

тельной скорости на его поверхности [5, 6, 9]. Для описания нелинейных и дифракционных эффектов в ультразвуковых пучках, создаваемых такими излучателями, наиболее адекватной моделью является трехмерное уравнение Вестервельта [10]. Однако его численное решение, особенно в режиме ударно-волновой фокусировки, является достаточно трудоемким даже с учетом высокой производительности и памяти современных электронно-вычислительных средств [7, 11]. Это не позволяет использовать его для решения многопараметрических задач [9, 12].

Гораздо более простой для численного решения моделью является нелинейное параболическое уравнение Хохлова–Заболотской (ХЗ) для аксиально-симметричных пучков [13]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_n} \left[\frac{\partial p}{\partial z_n} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau_n} \right] = \frac{c}{2} \Delta_{\perp} p. \quad (1)$$

Здесь p – акустическое давление; $\tau_n = t - z_n/c$ – безразмерное время в бегущей системе координат.

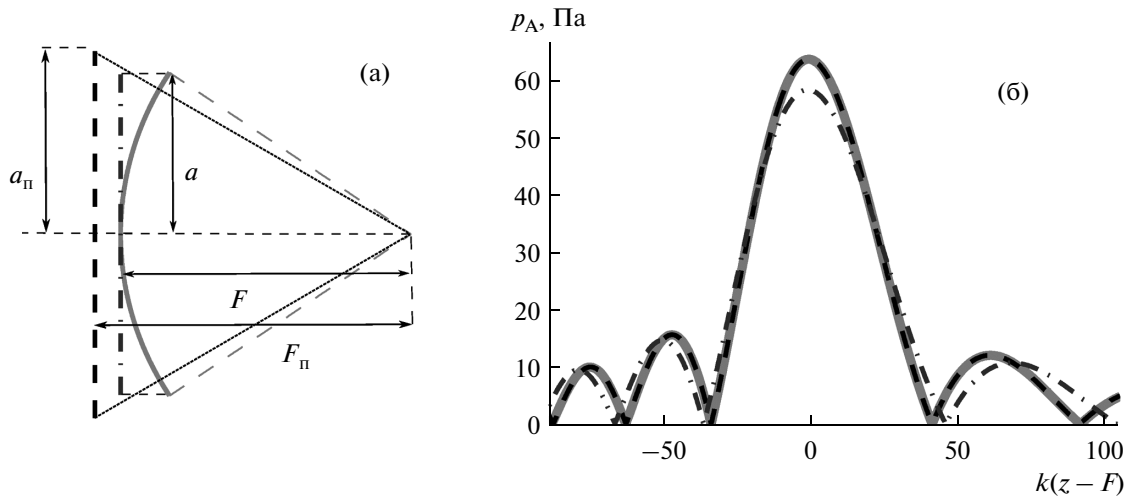


Рис. 1. Различные варианты постановки граничных условий на плоскости для описания в параболическом приближении поля, создаваемого излучателем в форме сферического сегмента (а) и соответствующие распределения амплитуды давления на оси пучка (б). Сплошные серые линии – решение в виде интеграла Рэлея для сферического излучателя. Штриховые линии – решение параболического уравнения с граничными условиями на плоскости, обеспечивающими наилучшее согласие с полной дифракционной моделью (радиус $a_n \neq a$, фокусная длина $F_n \neq F$, амплитуда $p_0^n \neq p_0$). Штрихпунктирные линии – решение параболического уравнения с граничными условиями на плоскости без изменения геометрических параметров излучателя и амплитуды давления на нем. Пример приведен для сферического излучателя с частотой 1 МГц, $a = 5$ см, $F = 9$ см и амплитудой на поверхности $p_0 = 1$ Па. При этом $a_n = 5.7$ см, $F_n = 9.8$ см, $p_0^n = 0.92$ Па.

нат; ε – параметр нелинейности; (z_n, r_n) – осевая и поперечная координаты с началом отсчета в центре плоского излучателя, которое в рамках предлагаемого в данной работе метода не совпадает с центром сферической чаши (рис. 1а); $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r_n} \frac{\partial}{\partial r_n} \left(r_n \frac{\partial}{\partial r_n} \right)$ – поперечная компонента оператора Лапласа в случае аксиальной симметрии пучка. Индекс “п” здесь и далее соответствует рассмотрению параболического уравнения. Для решения уравнения ХЗ (1) необходимо задать граничное условие на плоскости $z_n = 0$, перпендикулярной оси пучка.

Известно, что область применимости уравнения ХЗ ограничена описанием слабо фокусированных пучков [14]. Кроме того, отдельной задачей является постановка граничного условия на плоскости, в то время как излучатели ультразвуковой хирургии обычно имеют форму сферического сегмента. Выбор граничного условия в виде плоского источника с апертурой и амплитудой, как у сферического, и фазой, распределенной по параболическому закону для обеспечения фокусировки, применим для слабо фокусированных полей ультразвуковых диагностических датчиков с углом схождения, меньшим 30° [15]. Однако в случае сильно фокусирующих излучателей ультразвуковой хирургии с угловой апертурой порядка 70° это приводит к сильным отличиям по сравнению с решением полной дифракционной модели (рис. 1).

В предшествующих работах были предложены различные модификации уравнения ХЗ, позволяющие расширить область его применимости для более сфокусированных пучков, например, использование сфероидальных координат, учитывающих сходимость пучка [16], системы координат, повторяющих геометрию гауссовского пучка [17], и широкоугольное параболическое приближение учета дифракционных эффектов [18, 19].

Существует альтернативный подход к использованию параболического приближения для расчета полей сильно фокусирующих преобразователей без модификации самого уравнения ХЗ. В этом подходе граничное условие ставится на плоскости, проходящей через центр сферического источника, при этом апертура и амплитуда давления “эквивалентного” и сферического излучателей различаются. Так, в работе [20] было предложено выбирать апертуру эквивалентного излучателя путем переноса граничных условий на плоскость по сферически расходящимся из фокуса лучам, направленным к краям излучателя. В недавних работах было показано что изменением апертуры и амплитуды давления на эквивалентном поршневом излучателе можно добиться хорошего согласия численного решения уравнения ХЗ и данных измерений акустического давления в фокальной области как для линейных, так и нелинейных полей сильно фокусирующих излучателей с угловой апертурой около 70° [5, 6]. Тем не менее, на сегодняшний день не существует последователь-

ного подхода к переносу граничного условия со сферы на плоскость для получения наилучшего согласия решений параболической и полной дифракционной модели для сферического одноэлементного излучателя.

В данной работе предложен аналитический метод определения параметров эквивалентного излучателя для расчета в параболическом приближении нелинейных ультразвуковых полей сильно фокусирующих преобразователей. В отличие от предшествующих работ [5, 6], варьируются три параметра эквивалентного излучателя в параболической модели: апертура, положение плоскости, на которой задается граничное условие (фокусное расстояние), и амплитуда давления (рис. 1а). Эти параметры подбираются таким образом, чтобы добиться наилучшего соответствия решений линеаризованного уравнения Вестервельта (далее – полной дифракционной модели) и линеаризованного уравнения ХЗ (далее – параболической модели) на оси пучка в фокальной области излучателя (рис. 1б). Предложенный метод позволяет, используя аналитические формулы, перенести граничные условия со сферической поверхности реального излучателя (полная дифракционная модель) на плоскую поверхность эквивалентного излучателя (параболическая модель). Показано, что хорошее согласие решений для двух моделей наблюдается даже для сильно фокусирующих излучателей с угловой апертурой ~70°.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Как уже было сказано выше, выбор положения плоскости для постановки граничных условий и параметров эквивалентного излучателя проводится путем минимизации разницы между амплитудами давления на оси линейного фокусированного пучка, полученными в полной дифракционной модели с граничными условиями, заданными на сфере, и в параболической модели с граничными условиями на плоскости. Рабочая частота излучателей предполагается одинаковой.

Рассмотрим решение полной дифракционной модели в виде интеграла Рэлея, которое является частным случаем интеграла Кирхгофа–Гельмгольца [21]:

$$A(\mathbf{r}) = -i\rho_0 c \frac{k}{2\pi} \int_S \frac{v_n(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS'. \quad (2)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль излучающей поверхности S ; $A(\mathbf{r})$ – комплексная амплитуда акустического давления $p(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ в точке наблюдения с координатой \mathbf{r} , t – время; v_n – нормальная компонента комплексной амплитуды колебательной скорости на поверхности излучателя; \mathbf{r}' – радиус-вектор элемента поверхности dS' ; ρ_0 – плотность среды; c – скорость зву-

ка в среде; $k = \omega/c$ – волновое число; $\omega = 2\pi f$, f – рабочая частота излучателя. Данное решение является точным для плоских излучателей, но также с достаточной степенью точности применимо и широко используется на практике для расчета полей фокусирующих источников с угловой апертурой до 70° [22, 23]. При этом на оси пучка результат интегрирования (2) для комплексной амплитуды акустического давления $A(z)$ можно представить как [22]:

$$A(z) = \frac{\rho_0 c v_0}{1 - z/F} (e^{ikz} - e^{ikR_{\max}}). \quad (3)$$

Здесь z – координата вдоль оси пучка с началом отсчета в центре сферического излучателя; v_0 – амплитуда нормальной компоненты колебательной скорости излучающей поверхности; F – фокусная длина; R_{\max} – расстояние от точки наблюдения z до края излучателя. Расстояние $R_{\max} = R_{\max}(z)$ представимо в виде:

$$R_{\max} = F \sqrt{1 + \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{z}{F}\right) \sqrt{1 - \frac{a^2}{F^2}}}, \quad (4)$$

где a – радиус излучателя (рис. 1а). Используя (3), можно получить выражение для действительной амплитуды акустического давления на оси пучка в полной дифракционной модели:

$$p_A(z) = |A(z)| = \frac{2p_0}{|1 - z/F|} \left| \sin\left(k \frac{z - R_{\max}}{2}\right) \right|. \quad (5)$$

Здесь $p_0 = \rho_0 c_0 v_0$ – характерное акустическое давление на поверхности излучателя.

Рассмотрим теперь пучок, создаваемый круглым поршневым излучателем параболической модели (1). Определим его апертуру, положение центра и амплитуду таким образом, чтобы решение для линейного пучка максимально точно аппроксимировало более точное решение дифракционной задачи в виде интеграла Рэлея (5). При этом предполагается, что при пропорциональном увеличении амплитуды граничных условий в обеих моделях решения нелинейных уравнений Вестервельта и ХЗ также будут близки. Это подтверждают недавние работы, в которых результаты нелинейного моделирования в параболическом приближении для сильно фокусирующих излучателей сравниваются с данными экспериментов [5, 6, 24].

Переходя в линеаризованном уравнении ХЗ (1) к комплексной амплитуде давления $p(z_n, r_n, \tau_n) = A_n(z_n, r_n) \exp(-i\omega \tau_n)$, получаем параболическое уравнение теории дифракции:

$$\frac{\partial A_n}{\partial z_n} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} A_n. \quad (6)$$

Фокусировка пучка обеспечивается изменением фазы на поверхности преобразователя по параболическому закону:

$$A_{\Pi}(z_{\Pi} = 0, r_{\Pi}) = \begin{cases} p_{\Pi}^{\Pi} \exp(-ikr_{\Pi}^2/2F_{\Pi}), & r_{\Pi} \leq a_{\Pi}, \\ 0, & r_{\Pi} > a_{\Pi}. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь p_{Π}^{Π} – действительная амплитуда давления; F_{Π} – фокусная длина; a_{Π} – радиус плоского излучателя. Точное решение действительной амплитуды акустического давления на оси пучка p_A^{Π} в параболической модели (6), (7) имеет вид

$$p_A^{\Pi}(z_{\Pi}) = |A(z_{\Pi}, 0)| = \frac{2p_0^{\Pi} F_{\Pi}}{|z_{\Pi} - F_{\Pi}|} \left| \sin \left(\frac{ka_{\Pi}^2 z_{\Pi} - F_{\Pi}}{2F_{\Pi} 2z_{\Pi}} \right) \right|. \quad (8)$$

Задача состоит в выборе параметров граничного условия (7) (величин с индексом “ Π ”), при которых различие между осевыми распределениями в решениях $p_A^{\Pi}(z_{\Pi})$ (8) и $p_A(z)$ (5) будет минимально. Физический смысл такого алгоритма переноса граничных условий связан с тем, что окончательной целью является решение нелинейного уравнения ХЗ (1). Поскольку нелинейные эффекты носят накапливающийся характер по мере распространения волны, то при одинаковых распределениях давления (5) и (8) вдоль оси пучка в фокальной области, где амплитуда поля максимальна, нелинейные эффекты будут также проявляться одинаковым образом [5, 6].

Для решения поставленной задачи минимизации необходимо из полного набора параметров в (8) и (5) выделить те, которые удобнее использовать для варьирования. Решения (8) и (5) можно переписать таким образом, чтобы каждое из них содержало лишь три параметра. Это амплитуда давления на излучателе и два безразмерных параметра – соответствующее диафрагменное число и фокусная длина:

$$p_A(\sigma) = \frac{2p_0}{|\sigma|} kF \left| \sin \left(\frac{\sigma + kF - kR_{\max}(\sigma, kF, \alpha)}{2} \right) \right|, \quad (9)$$

$$p_A^{\Pi}(\sigma) = \frac{2p_0^{\Pi}}{|\sigma|} kF_{\Pi} \left| \sin \left(\frac{\sigma kF_{\Pi}}{16\alpha_{\Pi}^2 (\sigma + kF_{\Pi})} \right) \right|. \quad (10)$$

Здесь $\sigma = k(z - F) = k(z_{\Pi} - F_{\Pi})$ – безразмерная координата вдоль оси пучка с началом отсчета в фокусе; $\alpha = F/2a$ и $\alpha_{\Pi} = F_{\Pi}/2a_{\Pi}$ – диафрагменные числа; kF и kF_{Π} – безразмерные фокусные расстояния излучателей в полной дифракционной и параболической моделях; $kR_{\max} =$

$$= \sqrt{\sigma^2 + 2\sigma kF \sqrt{1 - (2\alpha)^{-2}} + (kF)^2}.$$

Таким образом, в качестве трех параметров, определяющих вид решений (9) и (10), удобно выбрать величины (α, kF, p_0) и $(\alpha_{\Pi}, kF_{\Pi}, p_0^{\Pi})$. Заметим, что основным параметром, определяющим пространственную структуру поля на оси пучка,

является диафрагменное число, характеризующее угловую апертуру излучателя. В самом деле, для излучателей с различной фокусной длиной и одинаковой угловой апертурой безразмерные распределения давления в фокальной области близки (рис. 2а), а в случае одинаковой фокусной длины, но различных угловых апертур – сильно различаются (рис. 2б). Как видно из рис. 3а, изменение параметров kF_{Π} (фокусной длины) и α_{Π} (угловой апертуры) обеспечивает смещение плоскости эквивалентного излучателя от фокуса и изменение его радиуса по сравнению со сферическим источником.

При неоптимальном выборе параметров эквивалентного излучателя распределения амплитуд давлений $p_A(\sigma)$ и $p_A^{\Pi}(\sigma)$ на оси пучка в полной дифракционной и параболической моделях заметно отличаются друг от друга, но имеют похожую структуру: главный дифракционный максимум и побочные максимумы в предфокальной области и за фокусом (рис. 3б). Будем считать, что наилучшее соответствие кривых $p_A(\sigma)$ и $p_A^{\Pi}(\sigma)$ вблизи фокуса достигается при совпадении решений в трех точках. Приравняем значения амплитуд давления в фокусе, $p_A^{\Pi}(0) = p_A(0)$, и координаты первых дифракционных нулей слева ($\sigma_1^{\Pi} = \sigma_1$) и справа ($\sigma_2^{\Pi} = \sigma_2$) от фокуса (рис. 3б). Положения нулей в решениях полной дифракционной (9) и параболической (10) моделей определяются аналитически из следующих уравнений:

$$\sin \left(\frac{\sigma + kF - kR_{\max}(\sigma, kF, \alpha)}{2} \right) = \sin(\varphi(\sigma)) = 0, \quad (11)$$

$$\sin \left(\frac{\sigma kF_{\Pi}}{16\alpha_{\Pi}^2 (\sigma + kF_{\Pi})} \right) = \sin(\psi(\sigma)) = 0. \quad (12)$$

Отсюда координаты σ_1 и σ_2 находятся из уравнений $\varphi(\sigma_1) = -\pi$ и $\varphi(\sigma_2) = \pi$, а σ_1^{Π} и σ_2^{Π} – из уравнений $\psi(\sigma_1^{\Pi}) = -\pi$ и $\psi(\sigma_2^{\Pi}) = \pi$. Теперь система уравнений для нахождения трех неизвестных параметров излучателя $(\alpha_{\Pi}, kF_{\Pi}, p_0^{\Pi})$ в параболической модели будет иметь вид

$$\begin{cases} p_A^{\Pi}(0) = p_A(0), \\ \sigma_1^{\Pi} = \sigma_1, \\ \sigma_2^{\Pi} = \sigma_2, \end{cases} \quad (13)$$

где правые части уравнений определяются заданными параметрами (α, kF, p_0) сферического излу-

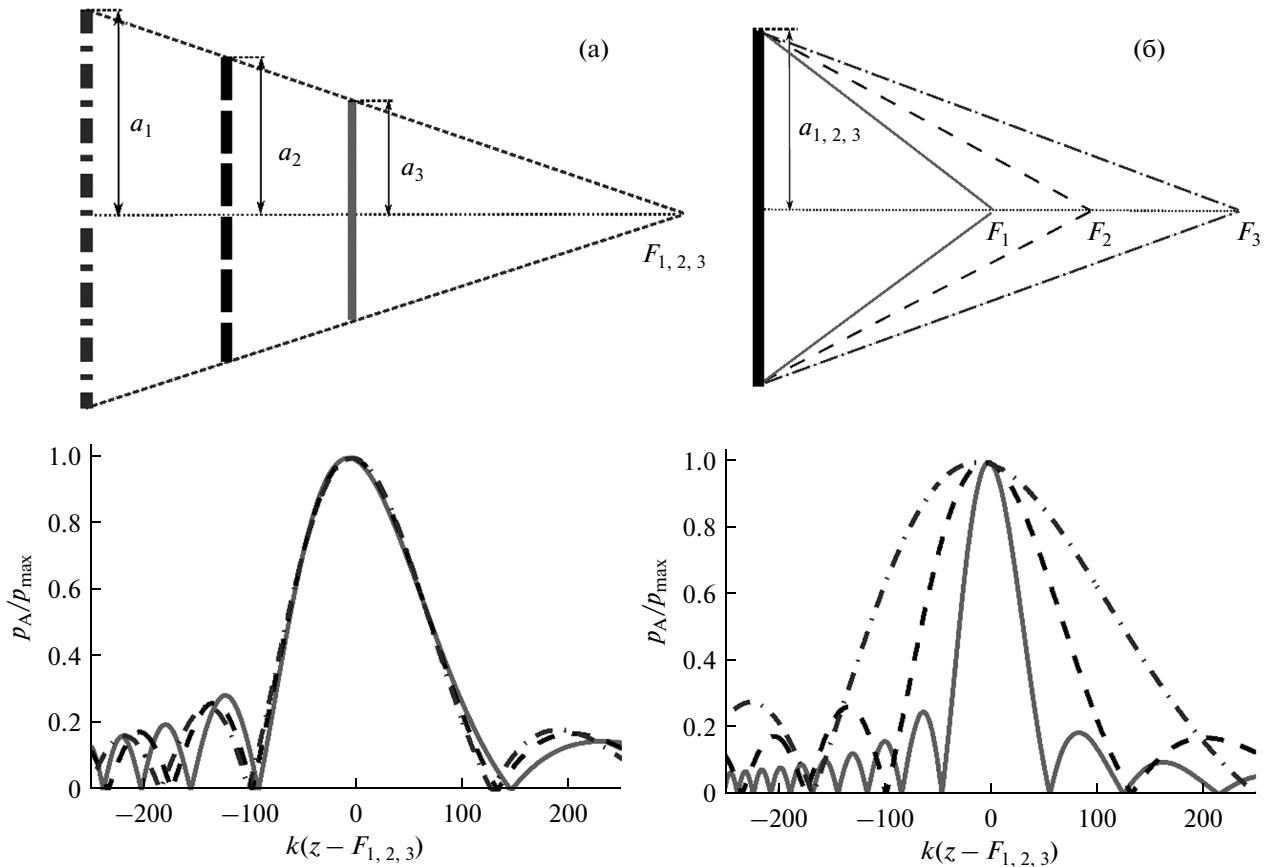


Рис. 2. Распределения амплитуды давления на оси пучка, нормированные на соответствующие максимальные значения, p_A/p_{\max} , рассчитанные в параболическом приближении для излучателей с одинаковым (а) и различным (б) диафрагмальным числом $\alpha = F/2a$. Примеры приведены для излучателей с частотой 1.5 МГц и (а) $F_{1,2,3} = 16; 12; 8$ см, $\alpha = 1.5$; (б) $F_{1,2,3} = 8; 12; 16$ см, $\alpha = 1; 1.5; 2$.

чателя. Решение этой системы представимо в следующем виде:

$$\begin{cases} \alpha_n = 0.5 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \right)^{1/2}, \\ kF_n = -\frac{2\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \\ p_0^n = 4\alpha_n^2 p_0 \frac{F}{F_n} \left(2 - \sqrt{4 - 1/\alpha^2} \right). \end{cases} \quad (14)$$

Здесь нули σ_1 и σ_2 определяются выражениями

$$\sigma_{1,2} = 4\pi \alpha \times \frac{kF(\mp kF - \pi)\sqrt{4\alpha^2 - 1} \mp 2\alpha \left[(kF)^2 \pm 3\pi kF + 2\pi^2 \right]}{(kF)^2 + 16\pi(\pi \pm kF)\alpha^2}. \quad (15)$$

Точное решение (14), (15) системы (13) является достаточно громоздким, а структура слишком сложна для качественного анализа. Однако, используя приближение малости длины волны по сравнению с размером излучателя, $kF \gg 1$, что обычно справедливо для излучателей медицинско-

го ультразвука, решение можно свести к более простому виду:

$$\begin{cases} \alpha_n = 0.5 \left(2 - \sqrt{4 - 1/\alpha^2} \right)^{-1/2}, \\ kF_n = \frac{4\alpha kF \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 - 1} \right)^2}{32\alpha^3 + \sqrt{4\alpha^2 - 1} (16\alpha^2 - 1) - 6\alpha}, \\ p_0^n = p_0 F / F_n. \end{cases} \quad (16)$$

На рис. 3в представлены распределения амплитуды давления на оси пучка после совмещения трех точек в (9) и (10) с использованием решения (16). Как видно, решения полной дифракционной и параболических моделей практически неразличимы в пределах главного дифракционного максимума и двух соседних. Тем не менее, представляет интерес более точно исследовать оптимальность данного подхода совмещения двух кривых в трех точках для получения их наилучшего согласия во всей фокальной области.

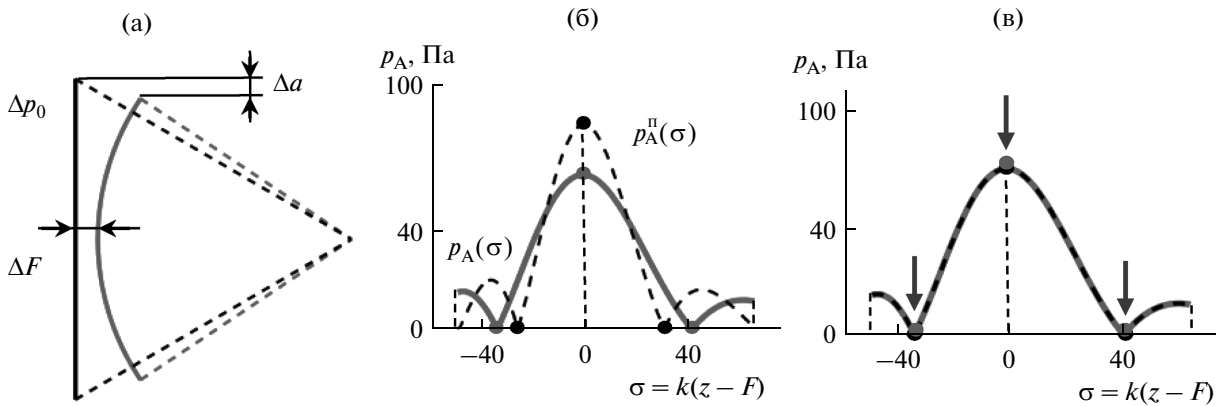


Рис. 3. Иллюстрация постановки граничных условий на плоскости в линейной параболической модели для описания ультразвуковых пучков, создаваемых одноэлементным излучателем в форме сферического сегмента. Для эквивалентного излучателя варьируется его положение (ΔF), радиус (Δa) и начальная амплитуда давления (Δp_0) (а). Распределения амплитуды давления на оси пучка в полной дифракционной $p_A(\sigma)$ и параболической $p_A^{\text{II}}(\sigma)$ моделях при начальном выборе параметров, который соответствует переносу граничных условий по сферически расходящимся из фокуса лучам, направленным к краям излучателя (б) и после выравнивания распределений в трех точках: в фокусе и первых от фокуса нулях давления (в).

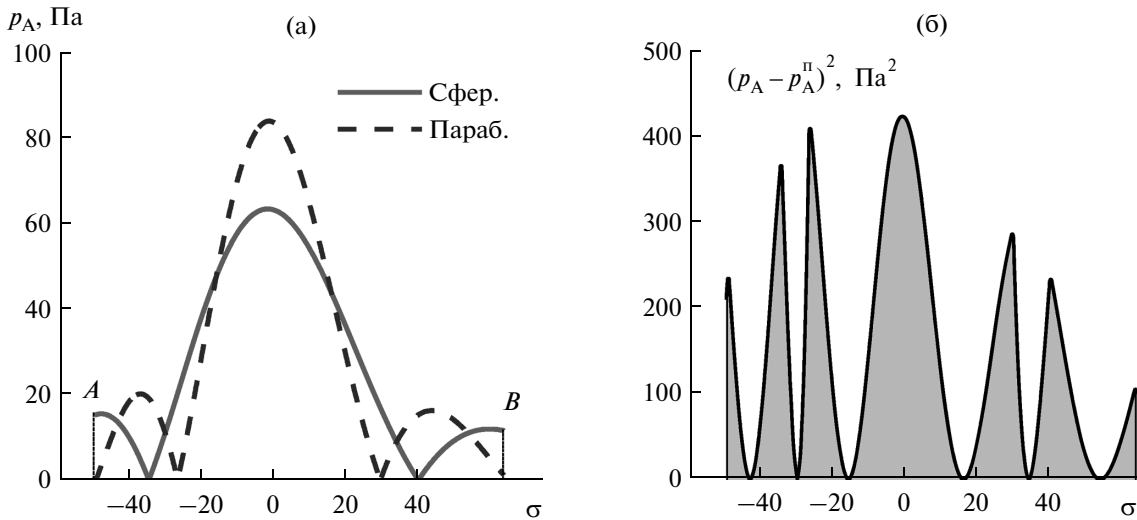


Рис. 4. Иллюстрация использования численного метода нахождения наилучшего соответствия между решениями для амплитуды давления на оси пучка в полной дифракционной и параболической моделях для излучателя в виде сферического сегмента. Метод состоит в минимизации интегральной невязки (17). Пример приведен для сферического излучателя с параметрами: частота 1 МГц, $a = 5$ см, $F = 9$ см и плоского излучателя с параметрами: частота 1 МГц, $a_{\text{пл}} = 6$ см, $F_{\text{пл}} = 9$ см.

Для проверки точности предложенного метода постановки граничных условий рассмотрим более общий численный подход. Определим функцию интегральной невязки между осевыми распределениями амплитуды $p_A(\sigma)$ и $p_A^{\text{II}}(\sigma)$ двух моделей, переменными которой являются параметры $(\alpha'_{\text{пл}}, kF'_{\text{пл}}, p_0^{\text{II}})$ эквивалентного параболического излучателя (рис. 4):

$$\Delta(\alpha'_{\text{пл}}, kF'_{\text{пл}}, p_0^{\text{II}}) = \int_A^B (p_A(\sigma) - p_A^{\text{II}}(\sigma))^2 d\sigma. \quad (17)$$

Здесь A и B – границы фокальной области, которую мы определим как отрезок, содержащий основной дифракционный максимум и половину первых двух побочных максимумов аксиального распределения амплитуды $p_A(\sigma)$ в полной дифракционной модели (рис. 4а). Положение границ фокальной области, A и B , рассчитывалось в максимумах функции, входящей в решение (9):

$$\left| \sin\left(\frac{\sigma + kF - kR_{\text{max}}(\sigma, kF, \alpha)}{2}\right) \right| = |\sin(\varphi(\sigma))| = 1, \quad (18)$$

так что положение точек A и B находится из условий $\varphi(A) = -3\pi/2$, $\varphi(B) = 3\pi/2$.

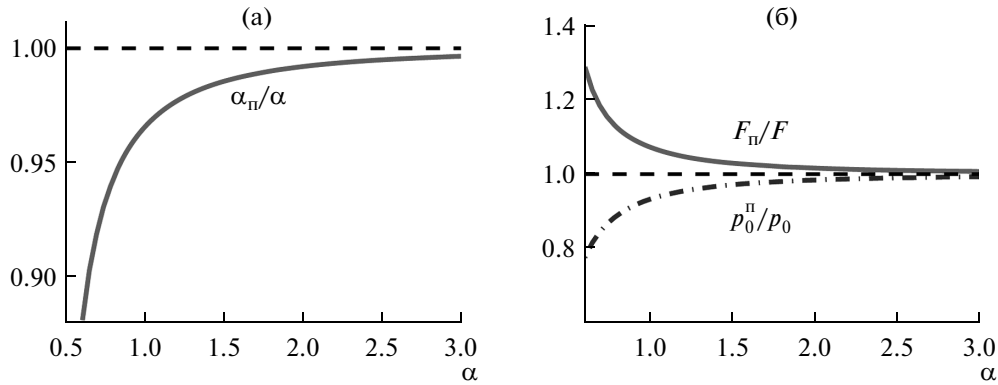


Рис. 5. Кривые пересчета диафрагменного числа (а), фокусного расстояния и начальной амплитуды давления (б) для эквивалентного излучателя в параболической модели в зависимости от параметров сферического излучателя.

Тогда задача постановки оптимального граничного условия сводится к нахождению параметров параболической модели $(\tilde{\alpha}_n, k\tilde{F}_n, \tilde{p}_0^n)$, обеспечивающих минимальное значение $\Delta(\tilde{\alpha}_n, k\tilde{F}_n, \tilde{p}_0^n)$ интегральной невязки. Решение задачи нахождения минимума осуществлялось методом Нелдера–Мида [25] вблизи точки (α, kF, p_0) . При этом интеграл (17) (рис. 4б) рассчитывался численно, методом Симпсона [26]. Программная реализация указанных методов осуществлялась с использованием языка программирования “MATLAB”. Расчеты проводились в широкой области практически интересных значений геометрических параметров сферического излучателя: $0.62 \leq \alpha \leq 2$, $200 \leq kF \leq 500$. Сравнение полученных результатов для граничного условия параболической модели, полученных аналитически и численно, показало, что во всей этой области различия между параметрами $(|\alpha_n - \tilde{\alpha}_n|, |kF_n - k\tilde{F}_n| \text{ и } |p_0^n - \tilde{p}_0^n|)$, не превышало 0.01%. Таким образом, можно считать, что аналитическое решение (16) для параметров излучателя в параболической модели позволяет с высокой точностью описывать поля в фокальной области сильно фокусирующих излучателей.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис. 5 представлены кривые пересчета (16) параметров эквивалентного излучателя параболической модели в зависимости от параметров сферического фокусирующего излучателя с равномерным распределением амплитуды колебательной скорости по поверхности. Как видно из решения (16), диафрагменное число в параболической модели α_n зависит только от диафрагменного числа в полной дифракционной модели α , причем для любого излучателя $\alpha_n < \alpha$ (рис. 5а). В этом случае и угловая апертура (угол, под которым

диаметр излучателя виден из точки фокуса) параболического излучателя $2\arctg((2\alpha_n)^{-1})$ меньше, чем сферического $2\arcsin((2\alpha)^{-1})$, т.е. эквивалентный излучатель всегда фокусирует слабее, чем сферический.

На кривых пересчета (рис. 5б) видно, что фокусная длина F_n и давление на излучателе p_0^n в параболической модели линейно зависят от соответствующих параметров F и p_0 в полной дифракционной модели, причем коэффициент пропорциональности определяется диафрагменным числом α . При этом для произвольного сферического излучателя эквивалентный излучатель параболической модели располагается дальше от точки фокуса ($F < F_n$), а амплитуда давления на его поверхности меньше ($p_0^n < p_0$). Заметим также, что диафрагменное число α действительно является основным параметром, характеризующим свойства излучателя: все коэффициенты масштабирования параметров эквивалентного излучателя по сравнению со сферическим определяются именно им. Влияние диафрагменного числа α на параметры параболической модели таково, что при малых α (сильно фокусирующий излучатель) отношения α_n/α , F_n/F и p_0^n/p_0 заметно отличаются от единицы, а при больших α (слабо фокусирующий излучатель) — стремятся к единице, т.е. все параметры параболического излучателя близки к соответствующим значениям параметров сферического излучателя.

В качестве примера на рис. 6 представлены результаты использования развитого метода для описания поля сильно фокусирующего сферического излучателя с частотой 1 МГц, радиусом $a = 5$ см, фокусной длиной $F = 9$ см ($\alpha = 0.9$), разработанного фирмой Imasonic для использования в исследованиях по гистотрипсии [24]. Как видно,

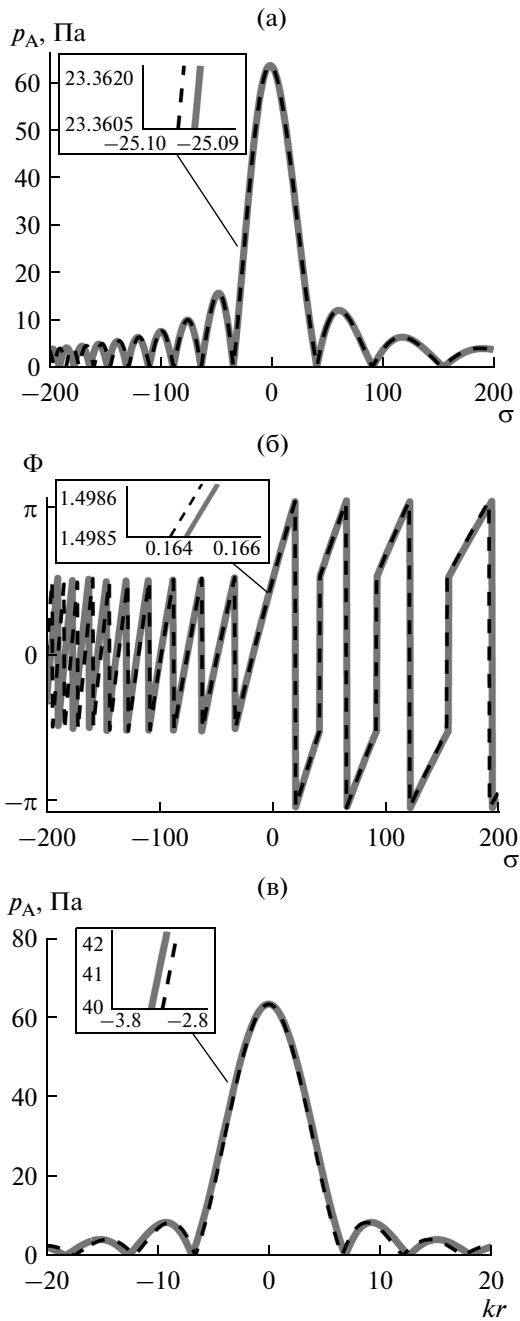


Рис. 6. Сравнение распределений амплитуды p_A (а) и фазы Φ (б) давления на оси излучателя и амплитуды давления в фокальной плоскости p_A (в) для полной дифракционной (сплошная линия) и эквивалентной ей параболической (пунктирная линия) моделей. На графиках приведены вставки в увеличенном масштабе. Пример приведен для сферического излучателя с частотой 1 МГц, $a = 5$ см, $F = 9$ см и амплитудой $p_0 = 1$ Па на поверхности. При этом в параболической модели $a_{\text{п}} = 5.7$ см, $F_{\text{п}} = 9.8$ см, $p_0^{\text{п}} = 0.92$ Па.

не только амплитуда давления вдоль оси пучка (рис. 6а), но также фаза на оси (рис. 6б) и амплитуда давления в фокальной плоскости (рис. 6в), рас-

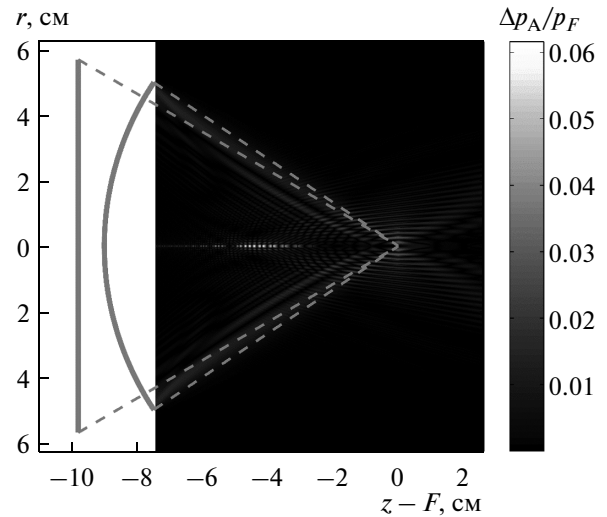


Рис. 7. Модуль разницы между действительной амплитудой давления в решениях полной дифракционной и параболической моделей, отнесенный к амплитуде давления в фокусе $\Delta p_A / p_F$, в плоскости, проходящей через ось пучка. Здесь r — поперечная координата, $z - F$ — продольная координата с началом отсчета в фокусе. На двумерном распределении изображены сферический и эквивалентный ему плоский излучатели.

считанные с помощью интеграла Рэля для сферического излучателя и в параболическом приближении для эквивалентного излучателя, практически неразличимы в пределах нескольких дифракционных максимумов вокруг фокуса. На выносках слева изображены области графиков в увеличенном масштабе для визуализации различий между кривыми. Из рис. 6 видно, что формулы (16) позволяют перенести граничные условия со сферы на плоскость с высокой точностью даже для такого сильно фокусирующего излучателя. Так, на выноске рис. 6а видно, что амплитуды давления на оси в двух моделях различаются в пятом знаке.

Несмотря на то, что предложенный метод позволяет добиться хорошего соответствия между распределениями амплитуды давления на оси излучателя в двух моделях, вопрос о применении параболического приближения в остальном пространстве остается открытым. Для ответа на этот вопрос были численно рассчитаны двумерные распределения амплитуды давления в плоскости, проходящей через ось рассмотренного ранее излучателя (рис. 6). Расчеты проводились с использованием полной дифракционной и параболической моделей. На рис. 7 представлено двумерное распределение абсолютной величины разницы давлений $\Delta p_A = |p_A(z, r) - p_A^{\text{п}}(z, r)|$ в результатах двух моделей в этой плоскости, отнесенных к амплитуде давления в фокусе p_F . Как видно, максимальная невязка Δp_A во всей рассматриваемой об-

ласти не превышает 6%, а вблизи фокуса не превышает 3% от значения амплитуды давления p_F в фокусе. Области максимального несоответствия решений находятся на оси пучка в ближней зоне излучателей вблизи тех точек, в которых не совпадают нули распределений (рис. 6а). Однако из-за малых уровней давления и небольших размеров данной области это несоответствие не оказывает заметного влияния на нелинейные эффекты в фокусе [5, 6, 24].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен метод, позволяющий свести полную дифракционную задачу о нахождении поля излучателя с граничными условиями, заданном на сферической чаше с радиусом a и фокусной длиной F , к соответствующей задаче в параболическом приближении с граничным условием, заданном на плоскости. При этом параметры p_0^n , a_n и F_n параболической модели отличаются от параметров p_0 , a и F соответствующей модели сферического излучателя и могут быть легко определены по точным (14) и (15), либо приближенным (16) аналитическим формулам. Проведена проверка полученного метода для случая сильно фокусирующего излучателя ультразвуковой хирургии. Показано, что в пространстве вблизи фокуса результаты, полученные в полной дифракционной и параболической моделях, различаются между собой не более чем на 3%. Максимальное отличие составляет 6% и наблюдается в низкоамплитудной области ближнего поля излучателя, в которой нелинейные эффекты проявляются слабо, и которая представляет гораздо меньший интерес для практических задач ультразвуковой хирургии.

Заметим, что параболическая модель и предложенный в данной работе метод переноса граничных условий на плоскость могут быть использованы не только для одиночных фокусирующих элементов с равномерным распределением амплитуды, но и для излучателей с неравномерным распределением амплитуды [5, 6], а также многоэлементных фазированных решеток, у которых круглые поршневые элементы находятся на сферической чаше [7]. В этом случае выбор начального давления p_0^n , положения F_n и радиуса a_n эквивалентного излучателя может осуществляться численно, основываясь на нахождении наилучшего соответствия решения (10) параболического уравнения и либо рассчитанного, либо измеренного поля на оси реального источника.

Предложенный метод постановки граничного условия для параболического уравнения представляет несомненный интерес для моделирования нелинейных полей, создаваемых излучателями ультразвуковой хирургии, поскольку скорость

расчета такой задачи возрастает на несколько порядков по сравнению с полной дифракционной моделью. Благодаря этому параболическая модель позволяет решать нелинейные обратные задачи, требующие многократного решения прямой задачи [9]. Кроме того, она гораздо проще для использования исследователями и инженерами, не являющимися специалистами в области моделирования.

Авторы благодарны О.А. Сапожникову и Л.Р. Гаврилову за полезные обсуждения работы. Работа поддержана грантом РФФИ № 14-12-00974.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаврилов Л.Р. Фокусированный ультразвук высокой интенсивности в медицине. М.: Фазис, 2013.
2. Бэйли М.Р., Хохлова В.А., Сапожников О.А., Карл С.Г., Крам Л.А. Физические механизмы воздействия терапевтического ультразвука на биологическую ткань (обзор) // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 4. С. 437–464.
3. Parsons J., Cain C., Abrams G., Fowlkes J. Pulse, cavitation ultrasound therapy for controlled tissue homogenization // *Ultrasound Med. Biol.* 2006. V. 32. № 1. P. 115–129.
4. Khokhlova T.D., Canney M.S., Khokhlova V.A., Sapozhnikov O.A., Crum L.A., Bailey M.R. Controlled tissue emulsification produced by high intensity focused ultrasound shock waves and millisecond boiling // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. V. 130. № 5. P. 3498–3510.
5. Canney M.S., Bailey M.R., Crum L.A., Khokhlova V.A., Sapozhnikov O.A. Acoustic characterization of high intensity focused ultrasound fields: a combined measurement and modeling approach // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 124. № 4. P. 2406–2420.
6. Bessonova O.V., Wilkens V. Membrane hydrophone measurement and numerical simulation of HIFU fields up to developed shock regimes // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.* 2013. V. 60. № 2. P. 290–300.
7. Kreider W., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A., Farr N., Partanen A., Bailey M.R., Khokhlova V.A. Characterization of a multi-element clinical HIFU system using acoustic holography and nonlinear modeling // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.* 2013. V. 60. № 8. P. 1683–1698.
8. Jaros J., Rendell A., Treeby B. Full-wave nonlinear ultrasound simulation on distributed clusters with applications in high-intensity focused ultrasound // *Int. J. High Perf. Comput. Appl.* 2015. P. 1–19.
9. Росницкий П.Б., Юлдашев П.В., Хохлова В.А. Влияние угловой апертуры медицинских ультразвуковых излучателей на параметры нелинейного ударно-волнового поля в фокусе // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 3. С. 325–332.
10. Westervelt P.J. Parametric acoustic array // *J. Acoust. Soc. Am.* 1963. V. 35. № 4. P. 535–537.
11. Юлдашев П.В., Хохлова В.А. Моделирование трехмерных нелинейных полей ультразвуковых терапевтических решеток // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 3. С. 337–347.

12. Бессонова О.В., Хохлова В.А., Бэйли М.Р., Кэнни М.С., Крам Л.А. Фокусировка мощных ультразвуковых пучков и предельные значения параметров разрывных волн // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 4–5. С. 445–456.
13. Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акуст. журн. 1969. Т. 15. № 1. С. 35–40.
14. Tjotta J.N., Tjotta S., Vefring E.H. Effects of focusing on the nonlinear interaction between two collinear finite amplitude sound beams // J. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 89. № 3. P. 1017–1027.
15. Pinton G.F., Trahey G.E. A comparison of time-domain solutions for the full-wave equation and the parabolic wave equation for a diagnostic ultrasound transducer // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr. 2008. V. 55. P. 730–733.
16. Katakura T., Ishiwata T., Matsuda K. Model equation for strongly focused finite-amplitude sound beams // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107. № 6. P. 3035–3046.
17. Гамильтон М.Ф., Руденко О.В., Хохлова В.А. Новый метод расчета параксиальной области интенсивных акустических пучков // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 1. С. 48–53.
18. Collins M.D. A split-step Padé solution for the parabolic equation method // J. Acoust. Soc. Am. 1993. V. 93. № 4. P. 1736–1742.
19. Katakura T., Nomura H., Clement G.T. // Application of the split-step Padé approach to nonlinear field predictions // Ultrasonics. 2013. V. 53. P. 432–438.
20. Левин В.М., Лобкис О.И., Маев Р.Г. Поле сферического преобразователя с произвольным углом раскрытия // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 1. С. 140–143.
21. Стретт Дж.В. (лорд Рэлей) Теория звука. Пер. с англ. М.: 1955.
22. O'Neil H.T. Theory of focusing radiators // J. Acoust. Soc. Am. 1949. V. 21. № 5. P. 516–526.
23. Сапожников О., Синило Т. Акустическое поле вогнутой излучающей поверхности при учете дифракции на ней // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 6. С. 813–821.
24. Rosnitskiy P., Yuldashev P., Khokhlova V. A boundary condition to the Khokhlov–Zabolotskaya equation for modeling strongly focused nonlinear ultrasound fields / Book of Abstracts of 20th International Symposium on Nonlinear Acoustics and 2nd International Sonic Boom Forum. 2015. P. 79.
25. Nelder J.A., Mead R. A simple method for function minimization // J. Computer. 1965. V. 7. P. 308–313.
26. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. Computer methods for mathematical computations. Prentice-Hall, 1977.