

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАТОР С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ В ВИДЕ ПОЛОСТЕЙ© 2013 г. *Т.Б. Крит¹, О.В. Руденко¹, В.Г. Андреев¹, В.В. Костиков¹, С.Н. Гурбатов²,
И.Ю. Демин²*¹Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова
²Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

timofey@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 16.11.2012

Исследуются сдвиговые волны конечной амплитуды в слое резиноподобной среды с неоднородностями в виде сквозных полостей на боковой грани. Полости параллельны основаниям и перпендикулярны направлению колебаний. Центры полостей смещены к одному из оснований, что позволяет исследовать 2 различные конфигурации резонатора с полостями внизу и наверху. На верхней поверхности слоя закреплена жесткая пластина конечной массы. Нижняя граница слоя колеблется по гармоническому закону с заданным ускорением. Уравнение движения частиц в резонаторе находилось с использованием модели среды с одним временем релаксации и кубичной зависимости сдвигового модуля от деформации. Амплитуда и форма сдвиговых волн в резонаторе рассчитывались методом конечных разностей на смещенных сетках. Измерения проводились в резонаторе в виде прямоугольного параллелепипеда, выполненного из резиноподобного полимера пластисола толщиной 15 мм. Неоднородности имели квадратное сечение со стороной 5 мм. Амплитуды колебаний в резонаторе достигали значений, при которых максимальные сдвиговые деформации в резонаторе составляли 0.4–0.6, что позволяло наблюдать нелинейные эффекты. Измерены резонансные кривые ускорения верхней границы слоя при различных амплитудах ускорения нижней границы. Проведен гармонический анализ профилей волн и показано, что нелинейные эффекты наиболее выражены в резонаторе с полостями, расположенными в области максимальных деформаций.

Ключевые слова: резиноподобная среда, кубичная нелинейность, сдвиговая упругость, стоячие волны, резонатор, структурная неоднородность.

В последние годы актуальной стала задача исследования механических свойств материалов типа резин и полимеров. Особенно большое внимание уделяется созданию новых методик для измерения сдвиговой упругости мягких биологических тканей. Как правило, указанные резиноподобные материалы и мягкие ткани неоднородны по структуре. Неоднородности могут быть созданы либо искусственно, либо образоваться естественным путем. Например, биологическая ткань неоднородна по своей природе. Резиновые изделия армируют, помещая внутрь металлическую проволоку, в целях повышения прочности. Для облегчения конструкций в образцах делают полости. Структурные неоднородности приводят к неоднородностям сдвиговой упругости [1] и оказывают влияние на резонансные характеристики исследуемых образцов. В настоящей работе рассматриваются колебания конечной амплитуды, при которых проявляются нелинейные эффекты. Наличие неоднородностей существенно влияет

на нелинейные параметры среды и приводит к особенностям проявления нелинейных эффектов. Удобным объектом для наблюдения нелинейных эффектов является резонатор с резиноподобной средой. Резонатор позволяет получать вблизи резонансных частот колебания большой амплитуды даже при наличии маломощного виброисточника. Особенностью сред с центром инверсии, к которым относятся резиноподобные материалы, является отсутствие квадратичной нелинейности при деформациях сдвига. Кубичная нелинейность при сдвиговой деформации, таким образом, становится основной. Волновые процессы в кубично-нелинейной среде являются широкополосными ввиду генерации нечетных гармоник. В то же время релаксация среды приводит к дисперсии сдвигового модуля упругости и коэффициента сдвиговой вязкости, т.е. при разных частотах эти параметры имеют разные значения. Поэтому релаксацию среды следует учитывать одновременно с кубичной нелинейностью.

Нелинейные искажения профиля в бегущей волне конечной амплитуды рассмотрены достаточно детально [2, 3]. Результаты наблюдения динамики нелинейной трансформации профиля гармонической волны описаны в работе [4]. Стоячие волны в средах с кубической нелинейностью исследованы менее детально, чем бегущие. Теоретический анализ поведения стоячих волн в кубично-нелинейной среде проведен в [5], где получены решения для волн, содержащих ударные фронты. В [6] экспериментально исследованы стоячие сдвиговые волны в однородном резонаторе с кубической нелинейностью. Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию стоячих сдвиговых волн, возбуждаемых в резонаторе, заполненном неоднородной средой с кубической нелинейностью. Следует отметить, что наличие неоднородностей приводит к появлению квадратичной нелинейности, отсутствующей в однородной среде. Поэтому было важно исследовать генерацию четных гармоник и оценить вклад квадратичной нелинейности в развитие нелинейных эффектов.

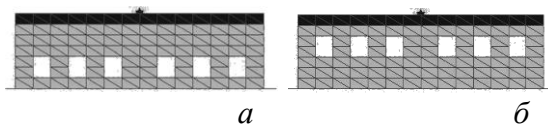


Рис. 1. Схематическое представление двух конфигураций исследуемого резонатора с разбиением на конечные элементы: (а) – полости располагаются вблизи нижней пластины; (б) – полости располагаются ближе к верхней пластине.

Рассмотрим резонатор в виде прямоугольного параллелепипеда с основанием 70x40 мм и толщиной $L=15$ мм. Параллелепипед изготовлен из резиноподобного материала с плотностью $\rho=0.98$ см³. Толщина резонатора L в несколько раз меньше его поперечных размеров, что позволяет считать движение частиц зависящим лишь от продольной координаты, т.е. пользоваться одномерным приближением [1] при расчете нелинейных эффектов. В параллелепипеде параллельно боковым граням сделано 6 сквозных полостей квадратного сечения со стороной 5 мм. Полости сделаны на одной высоте, их центры смещены относительно срединного сечения резонатора на расстояние 2.5 мм, что позволяет получить 2 различные конфигурации резонатора. На рис. 1а изображена конфигурация резонатора, в котором полости располагаются вблизи нижней пластины. На рис. 1б изображена конфигурация резонатора, в котором полости располагаются ближе к верхней пла-

стине. Параллелепипед закрепляется на горизонтальной пластине, которая совершает гармонические колебания в направлении оси x . На верхней грани параллелепипеда ($y=L$) закреплена пластина массы M , площадь которой равна площади верхней грани. Используется модель среды, в которой механическое напряжение складывается из релаксационного напряжения и упругого напряжения, пропорционального деформации. Механическая модель среды изображается параллельным соединением упругого элемента с нелинейным модулем $\mu_0 = \mu_{00} \times (1 + \beta \varepsilon^2)$, где μ_{00} – линейный модуль сдвига, β – нелинейный параметр, и максвелловского вязкоупругого элемента с вязкостью η_1 и сдвиговым модулем $\mu_1 = \eta_1/\tau$, где τ – характерное время релаксации напряжения.

Модуль сдвига μ_0 был предварительно определен статическим методом по измеренной зависимости напряжения от деформации. При этом нижняя граница слоя закреплялась неподвижно, а к верхней границе прикладывалась сила, создающая сдвиговую деформацию. Слой закреплялся так, что в зависимости от конфигурации неоднородности находились как вблизи закрепленной границы, так и около свободной границы. Отметим, что измеренные зависимости для обеих конфигураций совпали с достаточно большой точностью, т.е. статическая упругость слоя не зависит от положения неоднородностей, а определяется только их объемной концентрацией и упругостью самого материала. Полученные зависимости аппроксимировались кубической параболой: $\sigma = \mu_{00}(\varepsilon + \beta \varepsilon^3)$ и вычислялись значения линейного и нелинейного модулей. В неоднородном резонаторе $\mu_{00}=6$ кПа, $\beta=1.33$. Аналогичные измерения в однородном резонаторе из такого же материала позволили измерить сдвиговый модуль и нелинейный параметр самого полимерного материала (обозначения с индексом «м»): $\mu_{m00}=10$ кПа, $\beta_m=1.34$. Как и следовало ожидать, полости снижают эквивалентную упругость материала. Но статический нелинейный модуль как однородного материала, так и материала с неоднородностями, совпали, что также вполне объяснимо, поскольку нелинейный модуль в статике целиком зависит от самого материала.

При деформации всей системы на величину ε (в долях толщины слоя) в ней возникает механическое напряжение, которое складывается из напряжения пружинки

$$\sigma_{\infty} = \mu_0 \varepsilon = \mu_{00} (1 + \beta \varepsilon^2) \varepsilon \quad (1)$$

и напряжения максвелловской схемы σ'

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \frac{\sigma'}{\tau} = \frac{\eta_1}{\tau} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (2)$$

Уравнение движения частиц среды имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial y}. \quad (3)$$

В него входит производная скорости частиц v по времени и механическое напряжение $\sigma = \sigma_\infty + \sigma'$. Уравнения (1)–(3) должны быть дополнены граничными условиями. Первое условие – заданное значение ускорения нижней пластины резонатора, второе условие определяется из закона движения верхней пластины:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{y=0} = W_0 \cos \omega t, \quad (4)$$

$$\left(M \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma S \right) \Big|_{y=L} = 0. \quad (5)$$

Получившаяся система соотношений (1)–(5) в работе [6], где рассматривался однородный резонатор, моделировалась методом конечных разностей на смещенных сетках. Использованный в [6] алгоритм не позволяет моделировать неоднородный резонатор. Моделирование в линейном приближении проводилось методом конечных элементов (МКЭ) [1]. Этот метод учитывает структурные неоднородности в резонаторе, однако в модели, основанной на МКЭ, релаксация не учитывалась. В результате, решение задачи разбивалось на два этапа. МКЭ использовался на первом этапе для вычисления резонансных кривых неоднородного резонатора с учетом расположения полостей и определения линейного сдвигового модуля упругости материала (μ_{00}). Затем, также с использованием МКЭ, вычислялись резонансные кривые для однородного резонатора, которые совпадали с резонансными кривыми для каждой конфигурации неоднородного резонатора. Значения сдвигового модуля упругости и коэффициента сдвиговой вязкости, использованные в расчете однородных резонансных кривых по указанному алгоритму, впоследствии использовались в качестве эффективных параметров.

Ввиду того, что модель, основанная на МКЭ, не учитывает кубичной нелинейности среды и наличия в среде релаксации, измеренные с ее помощью эффективные параметры использовались на втором этапе, при расчете сдвига резонансной частоты, обусловленного нелинейными эффектами. На этом этапе расчет производился в рамках модели нелинейного однородного резонатора с релаксацией [6]. Значение нелинейного коэффициента β , при котором различие

между измеренной и рассчитанной зависимостью сдвига резонансной частоты от величины сдвиговой деформации было минимально в смысле МНК, принималось за измеренный параметр неоднородной среды.

Резонансные кривые, рассчитанные с использованием МКЭ в линейном режиме колебаний, приведены на рис. 2. Линией 1 показано отношение амплитуд ускорений верхней и нижней пластин резонатора с полостями внизу, линией 2 – отношение амплитуд ускорений верхней и нижней пластин резонатора с полостями наверху.

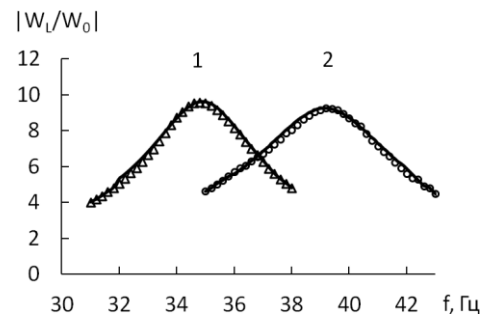


Рис. 2. Измеренные резонансные кривые в конфигурации резонатора, изображенной на рис. 1а (треугольники) и на рис. 1б (кружки). Линиями показаны рассчитанные кривые

Измерения были проведены на установке, описанной в [6]. Колебания нижней пластины резонатора возбуждались вибратором Brüel&Kjær 4810. Электрический сигнал на вибратор поступал с генератора сигналов Tektronix 3021В через усилитель мощности MF LV 103. Ускорения нижней и верхней пластин резонатора измерялись миниатюрными одноосными акселерометрами Brüel&Kjær 4374. Масса акселерометров была 1 г, т.е. их влиянием на процесс колебаний резонатора можно было пренебречь. Сигналы акселерометров регистрировались цифровым осциллографом Tektronix 3032В и передавались через GPIB интерфейс в компьютер. Управление экспериментальной установкой и сбор данных осуществлялись с помощью программы, написанной в среде LabView. Измерения проводились с шагом по частоте 0.1 Гц, что обеспечивало достаточную точность определения вязкоупругих параметров пластисола. Для обеспечения постоянства амплитуды ускорения нижней пластины в указанном частотном диапазоне был использован следующий алгоритм. При заданной частоте на выходе генератора устанавливалось напряжение, при котором амплитуда ускорения нижней пластины была немного меньше необходимого

значения. Это напряжение увеличивалось до тех пор, пока амплитуда ускорения не достигала необходимого значения с погрешностью, не превышающей 2%. В течение 2–3 секунд в резонаторе устанавливались стационарные колебания, после чего производилось измерение и запись ускорения верхней пластины резонатора. Затем задавалось следующее значение частоты, и измерения повторялись в соответствии с описанным алгоритмом.

Описанный алгоритм измерений имеет принципиальное значение при изучении резонансных характеристик в нелинейном режиме, когда требуется обеспечить постоянство внешнего воздействия на резонатор. Однако в нелинейном режиме профиль ускорения нижней пластины искажается за счет генерации в резонаторе высших гармоник. Поэтому в нелинейном режиме поддерживалась постоянная амплитуда ускорения на основной частоте, что потребовало модификации выше описанного алгоритма измерения резонансных характеристик. Для каждого заданного значения частоты записывалась реализация, содержащая около 50 периодов колебаний ускорения нижней пластины, и производилось вычисление амплитуды основной гармоники методом БПФ. Затем регулировкой выходного напряжения задающего генератора подбирались такое ускорение нижней пластины, при котором достигался заданный уровень амплитуды на основной частоте с погрешностью, не превышающей 3%.

Измеренные резонансные кривые для различных положений неоднородностей показаны на рис. 2 символами. Треугольниками показана зависимость для резонатора с полостями внизу (полости находятся в области максимальной деформации), кружками – для резонатора с полостями наверху (в областях с наименьшей деформацией). В результате сравнения измеренных и рассчитанных кривых найдены значения модуля сдвига $\mu_{00}=10.75\pm 0.11$ кПа и коэффициента сдвиговой вязкости $\eta_1=5.3\pm 0.06$ Па·с вблизи первой резонансной частоты. Значение линейного модуля сдвига, определенное таким образом с использованием МКЭ $\mu_{00}=10.75\pm 0.11$ кПа, совпало в пределах погрешности измерений со значением ($\mu_{00}=10.0\pm 0.9$ кПа), которое было определено статическим методом по зависимости сдвигового напряжения от деформации.

На первой резонансной частоте усиление максимально и составляет 9.3 в резонаторе с полостями наверху и 9.6 в резонаторе с полостями внизу. При амплитудах выше 5 м/с^2 такого усиления достаточно для проявления нели-

нейных эффектов. Причина различий резонансных кривых 1 и 2, изображенных на рис. 2, в том, что полости находятся в областях с различной механической деформацией при их положениях наверху и внизу. Небольшие изменения упругости в области больших деформаций приводят к эффективному снижению упругости слоя целиком и уменьшению первой резонансной частоты. Если полости в области малых деформаций – изменение упругости почти не сказывается на резонансных характеристиках, а снижение массы слоя может приводить даже к небольшому росту резонансной частоты. На рис. 3 сплошной линией показано распределение деформации на 1-й резонансной частоте, когда на толщине слоя укладывается примерно четверть длины волны. Деформации максимальны у нижней границы, в то время как вблизи верхней границы они минимальны. Символами показаны значения деформации, усредненные по размеру полости. На первой резонансной частоте максимальные деформации приходятся на нижние слои резонатора. Значение первой резонансной частоты максимально, когда полости находятся в нижней части резонатора.

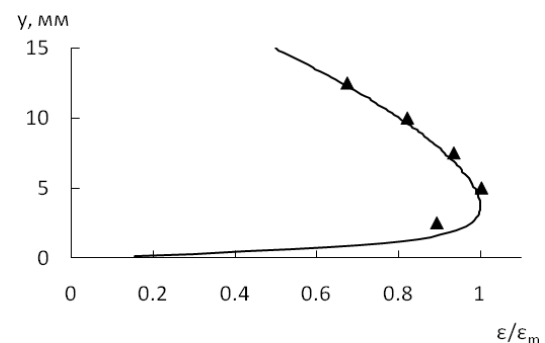


Рис. 3. Распределение деформации в однородном резонаторе на первой резонансной частоте. Символами показаны значения деформации, усредненные по размеру полости.

С увеличением амплитуды колебаний возникают нелинейные эффекты, характерные для сред с кубической нелинейностью. Полости в резонаторе оказывают влияние не только на линейный сдвиговой модуль неоднородной среды, но и на коэффициент нелинейности. На рис. 4 представлены измеренные резонансные кривые при разных амплитудах ускорения нижней пластины. Здесь и далее под амплитудой понимается амплитуда первой гармоники. Цифры у маркеров на рисунке – значения амплитуды ускорения нижней пластины в м/с^2 . Резонансная кривая, измеренная при амплитуде 1 м/с^2 , соответствует линейному режиму. Она

симметричная. С увеличением амплитуды ускорения резонансная частота увеличивается. Резонансная кривая становится несимметричной, на ней появляется перегиб, характерный для сред с кубической нелинейностью. В [6] теоретически показано, что при определенных амплитудах в однородном резонаторе возможно появление области бистабильности.

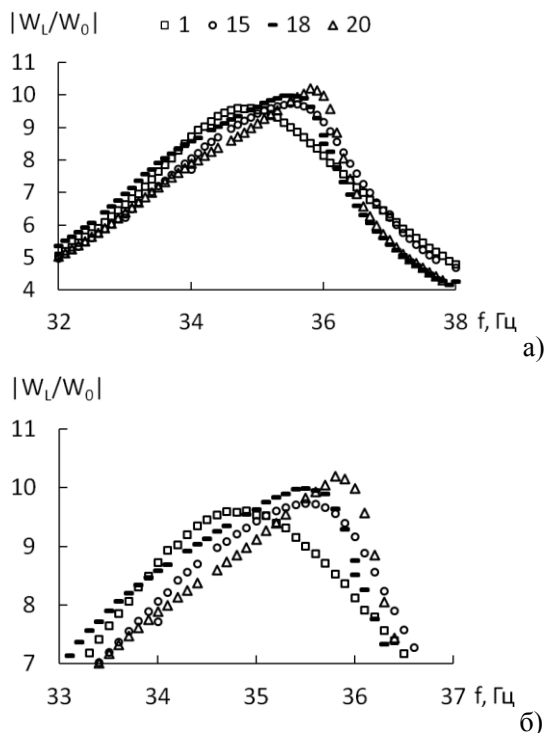


Рис. 4. Измеренные резонансные кривые в резонаторе с полостями внизу (в области больших деформаций) (а).

Кривые, показанные разными символами, соответствуют разным амплитудам ускорения нижней границы ($\square - 1$, $\circ - 15$, $\ast - 18$, $\Delta - 20$ м/с^2).

Фрагменты резонансных кривых вблизи максимумов (б).

По измеренным резонансным кривым была построена зависимость первой резонансной частоты от амплитуды ускорения нижней пластины. Зависимость была аппроксимирована теоретической кривой, рассчитанной с использованием модели однородного резонатора с учетом нелинейности и релаксации [6]. При этом было использовано эффективное значение модуля сдвига (7.6 кПа), при котором в линейном режиме ($W_0=1$ м/с^2) резонансная кривая 1, измеренная в неоднородном резонаторе, совпадает с рассчитанной с помощью одномерной модели однородного резонатора с учетом нелинейности и релаксации. По результатам аппроксимации было определено эффективное значение динамического нелинейного параметра. В резонаторе с полостями внизу $\beta=1.2$, что практически

совпадает со значением, определенным в ходе статических измерений. Отметим еще раз, что при моделировании нелинейных эффектов среда считалась однородной, и наличие полостей учитывалось с помощью эффективных параметров среды. Было получено эффективное значение нелинейного параметра, которое определяется как самим материалом, так и расположенными в нем неоднородностями. Как показано в [6], в однородной среде динамический нелинейный параметр на частотах 30–50 Гц равен 0.7–0.8, что почти вдвое меньше значения нелинейного параметра, измеренного по статической зависимости напряжения от деформации.

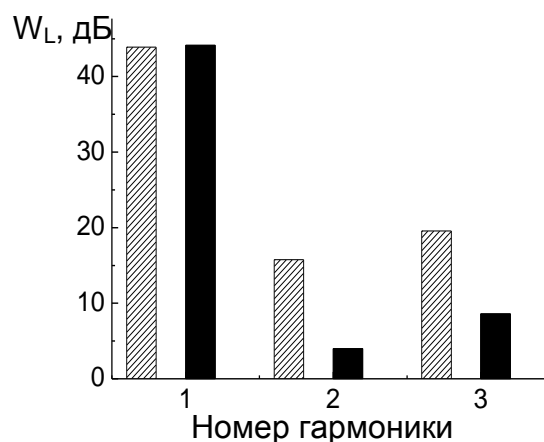


Рис. 5. Первые три гармоники в измеренных профилях ускорения верхней границы резонатора с полостями в области больших (заштрихованные столбики) и малых (черные столбики) деформаций

В резонаторе с кубической нелинейностью профиль ускорения верхней границы искажается за счет появления третьей гармоники. Этот эффект может быть более выраженным при наличии неоднородностей в области больших деформаций, а может быть существенно снижен, если неоднородности расположены вблизи пучности колебаний. На рис. 5 приведены первые три гармоники в измеренных профилях ускорения верхней границы резонатора. Заштрихованными столбиками показан гармонический состав профиля верхней границы резонатора с полостями внизу. Черными столбиками показан гармонический состав профиля верхней границы резонатора с полостями вверху. Видно, что уровень 3-й гармоники выше в резонаторе с полостями внизу. Наличие в спектре других гармоник (прежде всего, 2-й) связано с тем, что при проведении измерений возбуждение производится маломощным вибратором и становится нелинейным при больших амплитудах ускоре-

ния нижней пластины. Кроме того, сказывается структурная квадратичная нелинейность, которая также усиливается при положении неоднородностей в области максимальных деформаций.

Результаты измерений показали, что наличие полостей в области больших деформаций приводит к уменьшению первой резонансной частоты, в то время как их наличие в области малых деформаций ведет к росту резонансной частоты при малых колебаниях в резонаторе. В нелинейном режиме колебаний наличие полостей в области больших деформаций приводит к усилению нелинейных эффектов. Так, рост частоты при заданном значении коэффициента сдвиговой вязкости соответствует расчетным значениям для коэффициента нелинейности $\beta=1.2$, что практически совпадает с измеренным статическим значением данного параметра. Для однородного резонатора, исследованного в работе [6], динамический нелинейный параметр оказался вдвое меньше статического.

Список литературы

1. Андреев В.Г., Крит Т.Б., Костиков В.В., Шанин А.В., Шиндерук С.И. Стоячие сдвиговые волны в резонаторе с неоднородной резиноподобной средой // Акуст. журн. 2011. Т. 57, №1. С. 3–12.
2. Руденко О.В., Сапожников О.А. Волновые пучки в кубично нелинейных средах без дисперсии // ЖЭТФ. 1994. Т. 106, № 2(8). С. 395 – 413.
3. Zabolotskaya E.A., Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Meegan G.D. Modeling of nonlinear shear waves in soft solids // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 116, № 5. P. 2807–2813.
4. Catheline S., Gennisson J.-L., Tanter M., Fink M. Observation of shock transverse waves in elastic media // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91, № 16. 164301. P. 1–4.
5. Руденко О.В., Хедберг К.М., Энфло Б.О. Стоячие акустические волны конечной амплитуды в кубично нелинейной среде // Акуст. журн. 2007. Т. 53, № 4. С. 522–532.
6. Андреев В.Г., Крит Т.Б., Сапожников О.А. Сдвиговые волны в резонаторе с кубичной нелинейностью // Акуст. журн. 2011. Т.57, №6. С.763–770.

NONLINEAR RESONATOR WITH PORES AS INHOMOGENEITIES

T.B. Krit, O.V. Rudenko, V.G. Andreev, V.V. Kostikov, S.N. Gurbatov, I.Y. Demin

Shear waves of finite amplitude are studied in a rubber-like layer with inhomogeneities represented by through pores made on the side faces. The pores are parallel to the bases and perpendicular to the oscillations. Their centres are shifted to one of the bases that lets one to study 2 different configurations of the resonator with pores at the bottom and the top. A rigid plate of finite mass is mounted on the top surface of the layer. The bottom border of the layer oscillates harmonically with given acceleration. The equation of particles motion in the resonator was found using the medium with a single relaxation time model and a cubic dependence of the shear modulus of deformation. Amplitude and shape of the shear waves in the resonator were calculated by the finite difference method on shifted grids. The measurements were performed in a resonator represented by rectangular parallelepiped made of 15 mm thick rubber-like polymer plastisol. Inhomogeneities had square cross-section with 5 mm side. The amplitudes of the oscillations in the resonator reached the point where the maximum shear strain in the resonator is 0.4 - 0.6, which allowed to observe nonlinear effects. The top bound acceleration resonance curves were measured at different acceleration amplitudes of the bottom bound. Harmonic analysis of wave profiles was conducted and it showed that nonlinear effects are most pronounced in the resonator with cavities located in the region of maximum deformation.

Keywords: rubber-like medium, cubic nonlinearity, shear elasticity, standing waves, resonator, structure inhomogeneity.